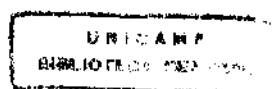


VISUALIZAÇÃO DE PONTOS SINGULARES DE CURVAS E SUPERFÍCIES

JESSE WILTON BASILIO

ORIENTADORA: PROF^a DR^a SUELI I. RODRIGUES COSTA

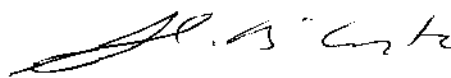
IMECC-UNICAMP
1998



VISUALIZAÇÃO DE PONTOS SINGULARES DE CURVAS E SUPERFÍCIES

Este Exemplar corresponde à redação final devidamente corrigida e defendida por **Jesse Wilton Basilio** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 23 de outubro de 1998



Profa. Dra. *Sueli Irene Rodrigues Costa*

Dissertação apresentada ao *Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP*, como requisito parcial para obtenção do *Título de Mestre em Matemática*

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Basilio, Jesse Wilton

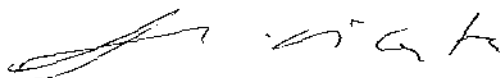
B292v Visualização de pontos singulares de curvas e superfícies / Jesse
Wilton Basilio -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

Orientador : Sueli Irene Rodrigues Costa

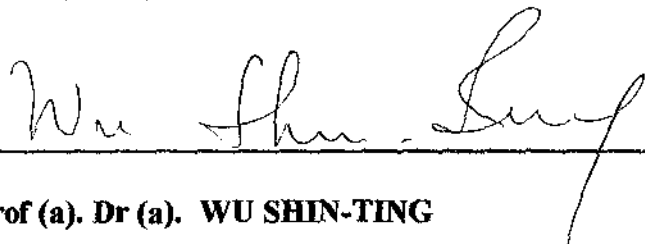
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Singularidades (Matemática). 2. Curvatura. 3. Curvas em
superfícies. 4. Visualização. I. Costa, Sueli Irene Rodrigues. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

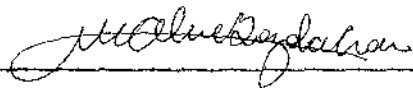
Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 23 de outubro de 1998
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA



Prof (a). Dr (a). WU SHIN-TING



Prof (a). Dr (a). MARIA ALICE BOZOLA GROU

*Dedico este trabalho aos
meus pais e a minha irmã*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, profundamente, à Professora Dr^a Sueli Irene Rodrigues Costa, pela orientação exemplar.

Agradeço ao CNPQ pela bolsa, que possibilitou a realização deste trabalho.

Agradeço ao Departamento de Matemática do IMECC (Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP) pelo curso de mestrado.

Agradeço ao PROIN (Programa de Integração Graduação pós-Graduação) pelo apoio.

Agradeço ao PAEG (Programa de Apoio ao Ensino de Graduação) e à UNICAMP, pela monitoria e tutoria, que propiciaram meu aperfeiçoamento profissional.

Agradeço ao Daniel S. Andrade e ao Rodrigo P. Pires, pelas dicas computacionais.

E, para finalizar, agradeço a todos aqueles que de alguma forma me ajudaram durante a minha permanência em Campinas, mas que não mencionei aqui , por se tratar de uma lista muito grande de nomes de pessoas que tive a felicidade de ter conhecido.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I: Teoria de Curvas : Conceitos e Resultados Gerais	01
1.1-Introdução	03
1.2-Conceito de Curva	03
1.3-Curvatura com Sinal de uma Curva Plana	06
1.4-O Triedro de Frenet, a Curvatura e a Torção de Curvas Regulares no Espaço	07
1.4-As Projeções Naturais	09
1.4.1-Interpretação Geométrica	09
1.5-As Projeções Naturais	09
1.6-O Círculo Osculador, a Evoluta e a Esfera Oscultriz	11
1.6.1-A Esfera Oscultriz	13
1.7-Contato	15
1.8-Cúspides	16
 CAPÍTULO II: Curvas Planas, Curvatura, Vértice e Evoluta	 21
2.1-Introdução	21
2.2-Convexidade	28
2.2.1-Curvatura e Posição Relativa entre Curvas	31
2.3-Teorema dos Dois ou Mais Vértices	35
2.4-A Família das Cassinianas	40
2.4.1-Histórico	41
2.4.2-Forma Paramétrica das Curvas Cassinianas	41
2.4.3-Análise Gráfica	42
2.4.4-Análise da Curvatura e Evoluta	44
2.4.5-Prova de Fatos Anteriores	45
 CAPÍTULO III: Curvas no Espaço: Curvatura, Torção e Vértice	 51
3.1-Introdução	53
3.2-Relação entre Cúspide na Binormal e Mudança de Sinal na Torção de Curvas no Espaço	55
3.2.1-Teorema	57
3.3-A Correspondência de Vértices de Curvas do Plano e do Espaço	59

3.4-Análise das Funções Curvatura e Torção para uma Curva (q,p) sobre o Toro	69
3.4.1-Anulamento da Curvatura da Projeção	72
3.5-Cúspides na S^2 e suas Projeções	77
3.5.1-Teorema	77
 CAPÍTULO IV: Superfícies: Curvaturas Principais e Superfícies Focais	85
4.1-Introdução	87
4.2-Noção de Superfície	87
4.2.1-Planos Tangente e Normal a uma Superfície	88
4.4-O Parabolóide Osculador a uma Superfície	91
4.5-Superfícies Focais	92
4.6-O Parabolóide Elíptico	93
4.7-A Sela (Parabolóide Hiperbólico)	98
4.8-O Parabolóide Circular	103
4.9-A Sela de Macaco	108
 Considerações Finais	113
 BIBLIOGRAFIA	115

Introdução

Esta dissertação aborda conceitos de curvas e superfícies de forma muito geométrica, trazendo interpretações e ilustrações de resultados clássicos e atuais que não se encontram em literatura usual. A ênfase na análise de pontos singulares entendendo-se estes como pontos especiais num sentido mais amplo que inclui os pontos críticos usuais, singularidades de primeira ordem e singularidades de ordem superior como os *vértices* de curvas no plano e no espaço (pontos extremos da curvatura e de mudança de sinal da torção).

O computador (com programação dentro dos softwares *Mathematica*, *Maple* e *POV-Ray*) foi intensa e longamente usado para os cálculos algébricos, numéricos e, especialmente, para a produção de imagens ilustrativas. A visualização, possível depois do advento do computador, tem desempenhado um papel muito importante na descoberta de novas conjecturas e resultados na área de geometria.

Este é o espírito que norteou este trabalho. A discussão de um grande número de exemplos permite, além do aprofundamento da compreensão de conceitos, à formulação de conjecturas que podem posteriormente, ser rigorosamente provados. As famílias a um parâmetro das curvas **Cassinianas** no plano e das curvas espaciais do tipo (q,p) sobre o toro são exaustivamente aqui exploradas com estes propósitos.

Os capítulos, assim se subdividem:

Capítulo 1: *Teoria de Curvas: Conceito e Resultados Gerais;*

Capítulo 2: *Curvas Planas: Curvatura, Vértice e Evoluta;*

Capítulo 3: *Curvas no Espaço: Curvatura, Torção e Vértice;*

Capítulo 4: *Superfícies: Curvaturas Principais e Superfícies Focais.*

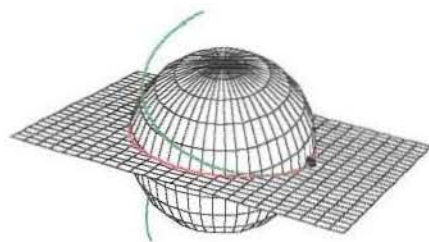
Este trabalho também integra o espírito e se constitui em contribuição para o *Laboratório de Pesquisa e Educação em Matemática na Universidade (EMU)* que, por sua vez, foi criado dentro do projeto **PROIN/CAPES** (*Programa de Integração Graduação pós-Graduação*), coordenado pela orientadora, no *Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)*. Assim, sendo, seu objetivo, além da formação do mestrando, é o de contribuir com esta abordagem para o aprendizado de geometria diferencial e tópicos de cálculo e análise de várias variáveis.

[http : \www.emu.ime.unicamp.br](http://www.emu.ime.unicamp.br)

CAPÍTULO I

TEORIA DE CURVAS:

CONCEITOS E RESULTADOS GERAIS



1.1 Introdução

A opção neste capítulo foi por uma abordagem descritiva de conceitos e resultados com o acréscimo de interpretação geométrica e ilustrações. Os resultados aqui relatados, encontram-se na reunião das referências [15], [10], [5], [1] e [11].

1.2 O Conceito de Curva

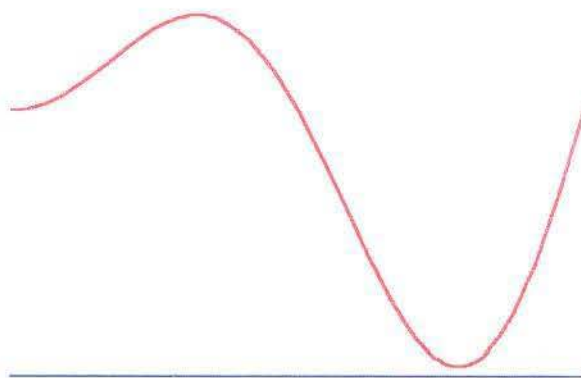


fig.1.1

Neste trabalho, assumiremos como definição de curva parametrizada diferenciável no plano ou no espaço como uma função diferenciável definida num intervalo da reta e assumindo valores no plano ou no espaço. Isto é, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde I pode ser qualquer intervalo da reta, aberto ou fechado, semi-aberto, finito ou infinito.

Como também é usual, empregaremos a palavra curva para denominar tanto a função quanto ao seu conjunto imagem, $\alpha(I)$. Nesta última conotação, a uma "curva" podem estar associadas diferentes funções ou parametrizações que tenham o mesmo "conjunto imagem" (traço). Pensando na trajetória de uma partícula no espaço, a curva imagem seria o traçado desta trajetória e uma parametrização descreveria também de que forma este traçado é percorrido.

Assim, o ponto $\alpha(t)$ corresponde à posição da partícula no instante t , isto é, com o

sistema de coordenadas cartesianas ortogonal no \mathbb{R}^3 , $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dá, com exatidão, a localização de P . As coordenadas cartesianas x , y e z são funções de valores reais diferenciáveis que fornecem a localização de P em relação a cada eixo do sistema de coordenadas. Se a partícula em questão desliza sobre um plano, então é preciso apenas duas coordenadas para localizá-la e, assim sendo, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ indica onde P está no tempo t , usando apenas duas funções reais $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em I .

Exemplo:

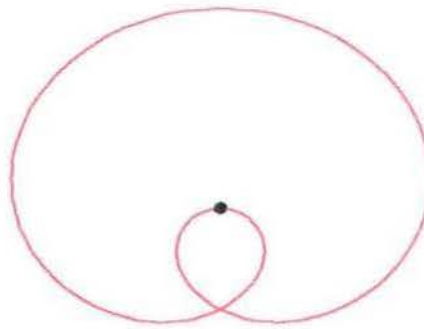


figura 1.2 Limaçon $c(t) = (0.5 + \cos(t))(\sin t, \cos t)$

Essa maneira vetorial de se descrever uma curva, α , através de várias funções reais diferenciáveis que fornecem as coordenadas de α em relação à origem do sistema, é chamada *paramétrica* e t é conhecido como *parâmetro* de α .

Ainda adotando a visão cinemática de α , quando percorre sua trajetória, P tem, para cada tempo t , uma *velocidade instantânea* que é a taxa de variação do deslocamento em função do tempo. Essa taxa de variação no instante $a \in I$ é expressa por $\frac{d}{dt}\alpha(a)$, ou simplesmente, $\alpha'(a)$, que é um vetor tangente à curva (traçado), cujas coordenadas são as derivadas das funções coordenadas de α .

Se ocorrer $|\alpha'(t)| \neq 0$ para algum $t \in I$, então t é dito *ponto regular* de α . Quando cada $t \in I$ é regular, α é chamada *curva regular*.



fig. 1.3 $c(t) = (t^3, |t|^3)$

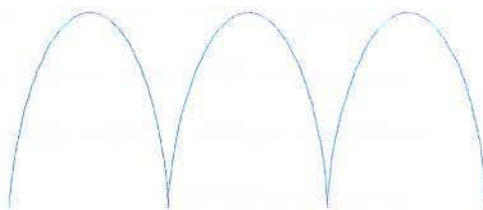


fig. 1.4 *ciclóide*: $c(t) =$

Porém, se existe a de modo que $|c'(a)| = 0$ como pode ser visto nas duas figuras acima, a é dito ponto *singular* ou *crítico*. Nos pontos onde o vetor tangente se anula, pode não existir reta tangente.

No exemplo da *Limaçon*, com a parametrização $c(t) = (1.25 + \cos 2t)((\cos 2t, \sin 2t))$ na figura 1.4, o vetor tangente é dado por $c'(t) = (\cos 2t + 0.5 \cos t, -\sin 2t - 0.5 \sin t)$ para $t \in I$.

Note que $|c'(t)| = \sqrt{1.25 + \cos t}$ não é constante, isto é, quando t percorre I , o módulo do vetor velocidade, que também é conhecido como *velocidade escalar*, varia. A figura 1.4 traz a *Limaçon* e seu vetor tangente para $a = \pi$.

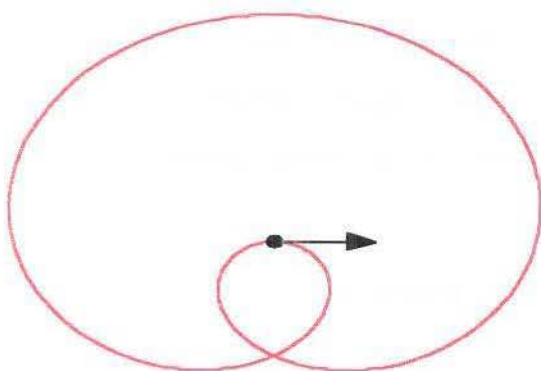


fig. 1.4

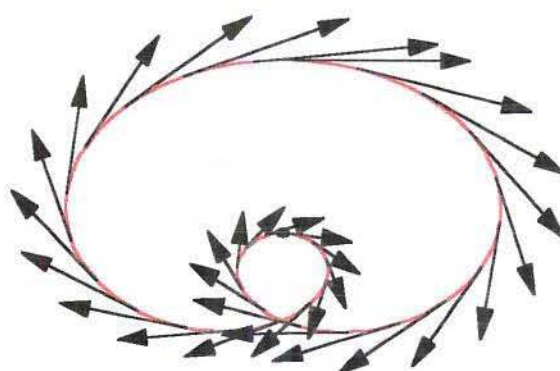


fig. 1.5

Na figura 1.5 pode-se perceber com clareza a variação do comprimento do vetor tangente.

Ainda fazendo uma analogia com a cinemática e identificando o parâmetro t com o tempo, podemos traduzir esta variação dizendo que, com esta parametrização, a curva não

está sendo percorrida com velocidade constante e andamos mais rapidamente nos trechos onde o vetor tangente tem maior módulo (velocidade escalar). Uma forma de "andarmos com velocidade constante " sobre uma curva, é utilizarmos o comprimento de arco da própria curva como parâmetro.

Considerando os limites das poligonais, mostra-se que o comprimento de arco de uma curva regular parametrizada $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, ou \mathbb{R}^2 de $c(a)$ até $c(t)$ é dado por $s(t) = \int_a^t |c'(t)| dt$.

Um fato importante é que toda curva regular admite uma parametrização pelo comprimento de arco $c(t) = c(\gamma(s)) = \beta(s)$ embora, na prática, seja quase sempre difícil explicitá-la. Nesta parametrização, temos o vetor velocidade com módulo constante: $|\beta'(s)| = 1$

O comprimento de arco s é também chamado parâmetro natural de uma curva e várias definições e resultados são obtidos através deste.

1.3 Curvatura com Sinal de uma Curva Plana

Para uma curva plana regular parametrizada pelo comprimento de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, teremos que o seu vetor tangente unitário pode ser dado como $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ e, portanto, $\alpha''(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s)\tilde{n}(s)$, onde $\tilde{n}(s)$ é o vetor $\alpha'(s)$ rotacionado de $\frac{\pi}{2}$ -rad.

Temos então que, $\alpha''(s) = \theta'(s)\tilde{n}(s)$ e, portanto, $|k(s)| = |\alpha''(s)|$ é definida como a função curvatura de α .

Em termos de parametrização qualquer, a curvatura com sinal de uma curva plana é dada por:

$$k(t) = \frac{\det[\alpha'(s), \alpha''(s)]}{|\alpha'(s)|^3}$$

Notamos que a curvatura de α será positiva ou negativa, conforme a *variação do ângulo*

do vetor tangente for crescente ou decrescente:

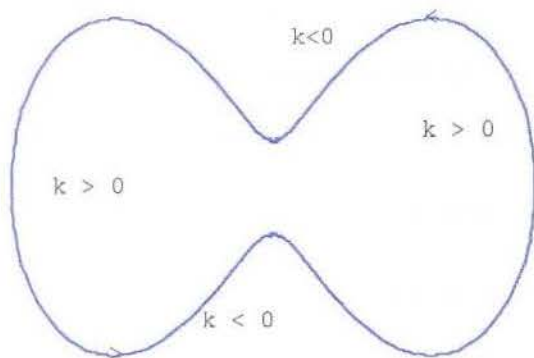


fig. 1.8

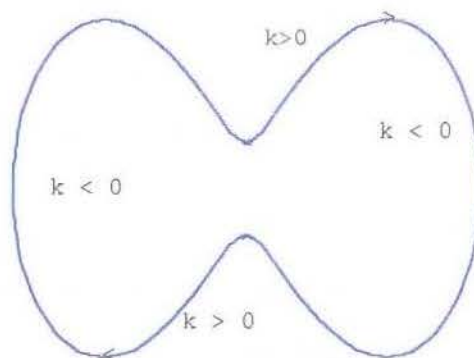


fig. 1.7

As *figuras* 1.6 e 1.7 ilustram a influência sofrida pelo sinal da curvatura para uma mesma curva parametrizada no sentido anti-horário e horário. Os sinais da curvatura são resultantes da análise da variação da direção do vetor tangente quando este percorre a curva de acordo com a parametrização indicada.

1.4 O Triedro de Frenet, a Curvatura e Torção de Curvas Regulares no Espaço

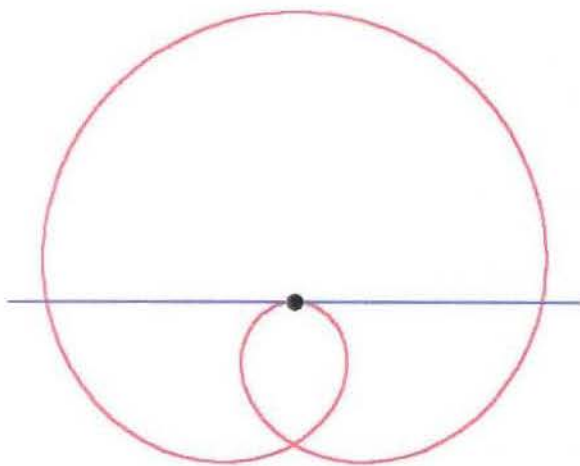


fig. 1.8 Reta tangente à Limaçon em $a = \pi$

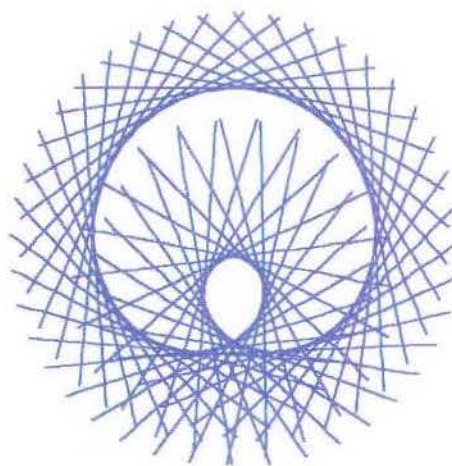


fig. 1.9 Retas tangentes à Limaçon

Considere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva parametrizada por comprimento de arco.

Assim, $|c'(s)| = c'(s) \cdot c'(s) = 1$. Logo, derivando ambos os membros da igualdade, obtem-se que $c''(s) \cdot c'(s) = 0$, isto é, o vetor $c''(s)$ é normal ao vetor $c'(s)$ para cada t em I .

Se $c''(s) \neq 0$, $n(s) = \frac{c''(s)}{|c''(s)|}$ é um vetor unitário que forma um ângulo reto com o vetor tangente de α em t . Esse vetor recebe o nome de *vetor normal* de α em t .

Denotando por $\mathbf{t}(s)$ o vetor tangente de α , o vetor definido por $b(s) = n(s) \times \mathbf{t}(s)$ é normal a \mathbf{t} e a n , simultaneamente, para cada $s \in I$ e seu nome é *vetor binormal* de α em a .

Quando s varia em I , os vetores tangente, normal e binormal formam três curvas na S^2 , chamadas *indicatrizes tangente, normal e binormal* respectivamente.

O triedro $\{\mathbf{t}(a), n(a), b(a)\}$, forma uma base ortonormal para o espaço tridimensional e é conhecido como *Triedro de Frenet*.

Com esta definição, é possível deduzir as chamadas *Equações de Frenet* para curvas com $\alpha''(s) \neq 0$.

$$\mathbf{t}' = kn;$$

$$n' = -k\mathbf{t} - \tau b;$$

$$b' = -\tau n,$$

$$\text{onde } k(s) = |\alpha''(s)| \text{ e } \tau(s) = \frac{\det[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)]}{k(s)^2}.$$

Se a curva não for dada pelo comprimento de arco, teremos:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \text{ e } \tau(t) = \frac{\det[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2} \text{ onde a função } \tau \text{ é chamada}$$

torção da curva α .

Notamos que a curvatura de uma curva no espaço é sempre positiva e uma condição necessária e suficiente para que a curvatura se anule é a dependência linear dos vetores $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ e para o anulamento da torção, a dependência linear de $\alpha'(t)$, $\alpha''(t)$ e $\alpha'''(t)$

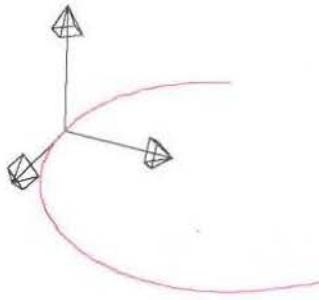


fig. 1.10 *Triedro de Frenet*

Os pontos onde a curvatura é máxima ou mínima, localmente, são chamados *vértices* da curva.

1.4.1 Interpretação geométrica:

A curvatura $k(s)$ mede a taxa de variação do ângulo entre os vetores tangentes (na esfera unitária) e $|\tau(s)|$ mede a taxa de variação dos ângulos entre os vetores binormais de α . O sinal da torção indica em que sentido ocorre tal variação.

Para curvas planas, o vetor binormal não varia, e por isso, $\tau \equiv 0$.

O vetor binormal de uma curva espacial α , num ponto, determina um plano que contém os vetores tangente e normal de α neste ponto. Este plano é chamado *Osculador* e será representado por \mathcal{O} e, sua variação no espaço está relacionado com a torção. Os planos determinados por n , b e t , b recebem o nome de *Normal* e *Retificante* respectivamente.

1.5 As Projeções Naturais

Considere o triedro $\{t(a), n(a), b(a)\}$ como sistema de coordenadas do \mathbb{R}^3 com origem em $\alpha(a)$ e x , y e z coordenadas de α em relação a este referencial. Assim, temos:

$$\alpha(a) = 1t(a) + 1n(a) + 1b(a) = x(a)t(a) + y(a)n(a) + z(a)b(a);$$

$$\alpha'(a) = t(a) = 1t(a) + 0n(a) + 0b(a) = x'(a)t(a) + y'(a)n(a) + z'(a)b(a);$$

$$\alpha''(a) = 0t(a) + k(a)n(a) + 0b(a) = x''(a)t(a) + y''(a)n(a) + z''(a)b(a);$$

$$\alpha'''(a) = -k(a)\mathbf{t}(a) + k'(a)n(a) + k(a)\tau(a)b(a) = x'''(a)\mathbf{t}(a) + y'''(a)n(a) + z'''(a)b(a);$$

Logo, quando $t \rightarrow a$,

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)^2} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{y'(t)}{2x(t)x'(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{y''(t)}{2(x'(t))^2} = \frac{k(a)}{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{z(t)}{x^3(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{z'(t)}{6x(t)(x'(t))^2} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{z''(t)}{6(x'(t))^3} = \frac{k(a)\tau(a)}{6};$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{z^2(t)}{x^3(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{z'(t)}{6x(t)(x'(t))^2} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{z''(t)}{6(x'(t))^3} = 2 \frac{k^2(a)\tau^2(a)}{9}$$

Logo, numa vizinhança de $\alpha(a)$, temos as aproximações

$$y \cong \frac{k(a)}{2}x^2 \quad \text{é a projeção de } \alpha \text{ no plano osculador, (i)}$$

$$z \cong \frac{k(a)\tau(a)}{6}x^3 \quad \text{é a projeção de } \alpha \text{ no plano retificante e, (ii)}$$

$$z^2 \cong 2 \frac{\tau^2(a)}{9k(a)}y^3 \text{ é a projeção de } \alpha \text{ no plano normal.- (iii)}$$

Esta decomposição de α é chamada *decomposição canônica*.

Considerando o triedro de Frenet para α em a , temos que $k(a) \neq 0$.

A coordenada z fornece a contribuição normal de α . Por (i) conclui-se que y não muda de sinal, e, portanto, α não atravessa o plano normal.

Outra observação que pode ser feita, através dessa decomposição de α se dá quando $\tau(a) < 0$ e $k(a) > 0$. Nessas condições, como z é a contribuição binormal de α , por (ii) para $a - \frac{\sqrt{6}}{k^2(a)} < t < a$ ocorre $z(t) < 0$ e para $a + \frac{\sqrt{6}}{k^2(a)} > t > a$, $z(t) > 0$. Ou seja, a componente binormal de α troca de sinal numa vizinhança de a .

Isso quer dizer que a curva atravessa o plano \mathcal{O} do semi-espço determinado por \mathcal{O} que contém $b(t)$ para o que contém $-b(t)$. Essa travessia acontece no sentido inverso

$\tau(a) > 0$ e $k(a) > 0$. Nos pontos em que τ muda de sinal, teremos que a curva fica de um único lado do plano osculador.

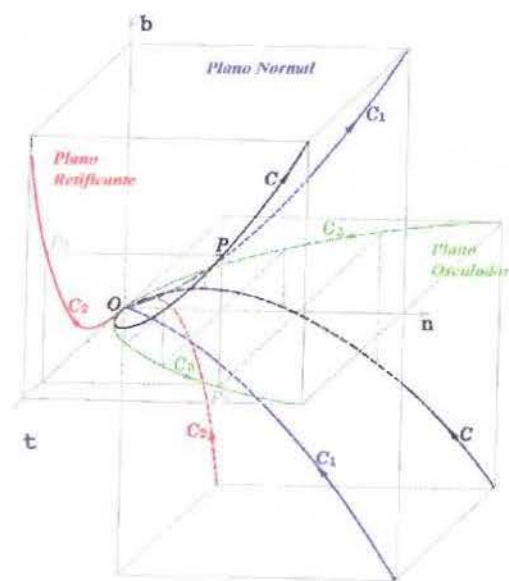


fig. 1.11

1.6 O Círculo Osculador, a Evoluta e a Esfera Oscultriz

A *reta tangente* de uma curva em um ponto a é a reta que melhor se aproxima a esta curva em a (figura 12). Usando o mesmo raciocínio construtivo a partir de a e de dois pontos $a+h$ e $a-h$, com h muito pequeno, encontra-se o círculo que melhor se aproxima à a em a como limite de círculos secantes passando por $\alpha(a)$, $\alpha(a+h)$ e $\alpha(a-h)$. Este círculo é, exatamente o círculo de centro $c(a) = \alpha(a) + \frac{1}{k(a)}n(a)$ e raio $r(a) = \frac{1}{|k(a)|}$ cujo nome é *círculo osculador* de a . Este círculo é também conhecido como "círculo por três pontos consecutivos" de uma curva.

Como se pode ver pela equação, o círculo osculador é ligado à curva através da função curvatura e será bastante estudado neste trabalho, uma vez que o lugar geométrico dos seus centros constituem uma curva muito interessante chamada *evoluta* de α .

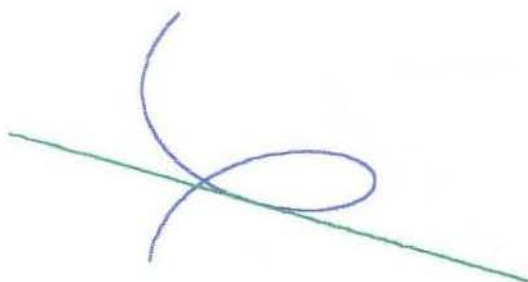


fig. 1.12 Hélice e uma tangente

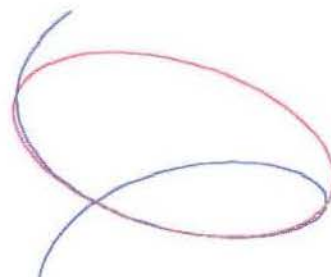


fig. 1.13 Hélice e círculo osculador

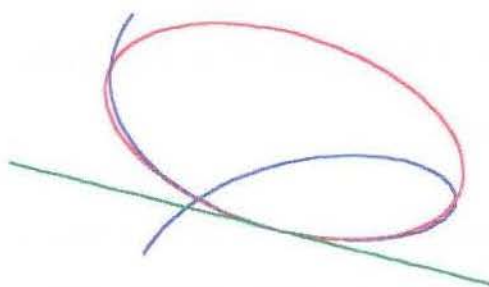


fig. 1.14 Ósculo da hélice com a reta tangente e círculo

1.6.1 A Esfera Osculatriz

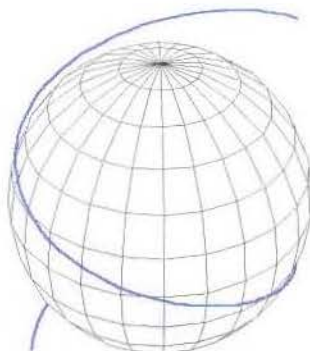


fig. 1.15 Hélice e esfera osculatriz

Assim como a reta tangente e o círculo osculador, é possível aproximar uma curva no espaço por uma superfície esférica denominada *Esfera Osculatriz*. Em outras palavras, a esfera oscultriz de uma curva num ponto a é aquela passando por “quatro pontos consecutivos” de a . Ou seja, é a esfera limite de esferas secantes passando por quatro pontos da curva.

O centro da esfera oscultriz de uma curva α em a é:

$$\beta(a) = \alpha(a) + \frac{1}{k(a)}n(a) + \frac{1}{\tau(a)}\left(\frac{1}{k(a)}\right)'b(a) \text{ e o raio é}$$

$$\rho(a) = \sqrt{\frac{1}{k^2(a)} + \frac{1}{\tau^2(a)}\left[\left(\frac{1}{k(a)}\right)'\right]^2}$$

Cada ponto do plano osculador, \mathcal{O} , de α em a tem componente binormal nula, pois \mathcal{O} é gerado pelos vetores normal e tangente. Assim, olhando para a expressão do centro da esfera oscultriz, quando a contribuição binormal é 0, tem-se o ponto $\gamma(a) = \alpha(a) + \frac{1}{k(a)}n(a)$ que é, justamente, o centro do círculo osculador de α em a . Logo, a intersecção da esfera oscultriz com o círculo osculador em a é um círculo com de centro $\gamma(a)$ e raio $|\alpha(a) - \gamma(a)| = \frac{1}{|k(a)|}$. Mas este círculo é o círculo osculador de α em a . Portanto, a intersecção da esfera oscultriz com o plano osculador em a é o círculo osculador de a em

a.

Este fato é bem ilustrado na figura 1.16.

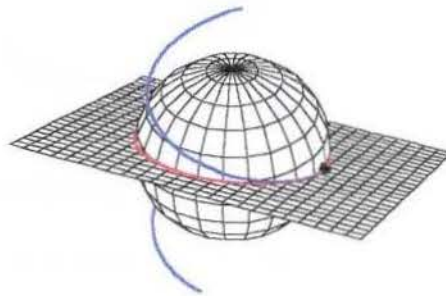


fig. 1.16 *Hélice, esfera osculatríz e círculo osculador*

1.7 Contato

A reta tangente à uma curva α é a reta por "dois pontos consecutivos" de α enquanto que o círculo osculador de α num ponto é o círculo por "três pontos consecutivos" de α . Por outro lado, nota-se que a curvatura do de α círculo osculador tem, no ponto em comum com α , o mesmo valor da curvatura da curva neste ponto ao passo que a curvatura da reta tangente, que é sempre nula, tem grande chance de diferir muito da curvatura de α . Isso equivale a pensar no círculo osculador como uma curva que se aproxima de α mais que a reta tangente numa vizinhança de α . Na realidade, o que acontece é que quanto "mais pontos consecutivos" tem duas figuras, maior semelhança local estas possuem.

Uma forma de se avaliar as diferentes maneiras como duas figuras se tocam é através da teoria de contato.

Mais formalmente, considere Σ_1 e Σ_2 duas curvas ou superfícies com um ponto P em comum. Tome um ponto A , de Σ_1 próximo de P e denote a distância de A até Σ_2 por AD . Nessas condições, diz-se que a superfície Σ_2 tem contato de ordem n com Σ_1 em P se, e somente se, para $A \rightarrow P$ sobre Σ_1 a razão $\frac{AD}{(AP)^r} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^+$, para $r = n + 1$ mas $\frac{AD}{(AP)^r} \rightarrow 0$ para $r = n$.

O contato entre duas curvas ou superfícies pode ser caracterizado usando os seguintes resultados:

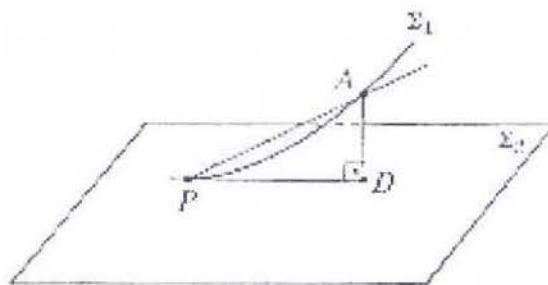


fig. 1.17

I) Uma condição necessária e suficiente para que duas curvas α e β parametrizadas por comprimento de arco tenham contato de ordem n num ponto $P = \alpha(a) = \beta(a)$ é que $\alpha^r(a) = \beta^r(a) = 0, r = 0, 1, 2, \dots, n$ e $\alpha^{n+1}(a) \neq \beta^{n+1}(a)$.

II) A condição necessária e suficiente para que duas superfícies tenham contato, no mínimo

de ordem dois, é que elas tenham um ponto e um plano em comum, mesmas direções e curvaturas principais (Isto é equivalente a admitir o mesmo parabolóide osculador). Ver seção VI-7.

Duas figuras que tem contato de ordem n , se, e somente se tem $n + 1$ pontos consecutivos em comum.

Assim, uma curva e sua reta tangente tem contato de ordem um, enquanto que com o círculo osculador e plano osculador, o contato com curva é de ordem dois, no mínimo. E o contato da esfera oscultriz com a curva é três, pois esta têm quatro pontos consecutivos em comum.

1.8 Cúspides

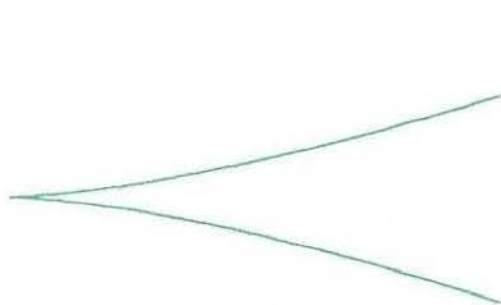


fig. 1.18 cúspide: $c(t) = (t^2, t^3)$

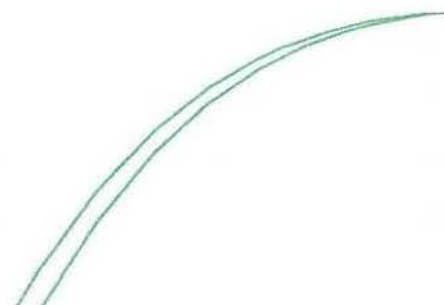


fig. 1.19 cúspide $c(t) = -(t^2, t^5 + 0.9t^4)$

Observando as figuras 1.18 e 1.19, percebe-se com clareza que existem pontos singulares das respectivas curvas para $t = 0$. A figura I-3 é o traço da curva $(t, |t|)$, e, usando a parametrização

citada tem-se que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{((t)', (t)')}{t'} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (1, 1) = (1, 1)$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{((t)', (-t)')}{-t'} \right)' = \lim_{t \rightarrow 0^-} (-1, 1) = (-1, 1),$$

e $\alpha'(0) = 0$. Com isso, constata-se que a curva não tem reta tangente em 0.

Considere a curva parametrizada por $c(t) = (t^2, t^3)$. O vetor tangente de c é

$$c'(t) = (2t, 3t^2) \text{ e ainda, } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{c'(t)}{|c'(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(2t, 3t^2)}{|(2t, 3t^2)|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{|t|} \frac{(2, 3t^2)}{\sqrt{4 + 9t^2}}.$$

Como $t < 0$, tem-se $|t| = -t$ e assim, $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{c'(t)}{|c'(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} -\frac{(2, 3t^2)}{\sqrt{4 + 9t^2}} = w$

Por outro lado, se $t \rightarrow 0^+$, $t > 0$ e $|t| = t$. Logo, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{c'(t)}{|c'(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(2t, 3t^2)}{|(2t, 3t^2)|} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{|t|} \frac{(2, 3t^2)}{\sqrt{4 + 9t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{|t|} \frac{(2, 3t^2)}{\sqrt{4 + 9t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{(2, 3t^2)}{\sqrt{4 + 9t^2}} = -w$$

e, $c'(0) = (2 \cdot 0, 3 \cdot 0^2) = (0, 0)$.

Nos dois casos, as curvas não apresentam tendência para o vetor tangente unitário em 0. Mas, note que os vetores tangentes à direita e a esquerda, no primeiro caso, formam um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos, ao passo que os vetores tangentes, no segundo caso, à direita e a esquerda, formam um ângulo de π radianos. Ou seja, no último caso, os vetores na vizinhança de 0 têm sentidos opostos. Essa é uma ocorrência especial de singularidade, chamada *cúspide*.

Mais formalmente:

Uma curva parametrizada α definida em $I \subset \mathbb{R}$ tem cúspide em $a \in I$ se,

$\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = -\lim_{t \rightarrow a^-} \frac{\alpha'}{|\alpha'|}$ e $\alpha'(a) = 0$. Cinematicamente, isto significa que em pontos arbitrariamente próximos de a , ocorre um movimento de aproximação do ponto $\alpha(a)$, por um dos lados da curva e, por outro lado, de afastamento na mesma direção e com sentido oposto ao de aproximação.

Há dois tipos de cúspides em curvas planas, que podem ser caracterizados pelo desenvolvimento de Taylor da curva no ponto de cúspide. Se o primeiro termo das funções coordenadas x e y que, no desenvolvimento de Taylor, não se anula são de ordem n e m , respectivamente, então, os dois tipos de cúspides podem ser diferenciados da maneira descrita a seguir:

Primeiramente, vale salientar que um ponto é *singular* para uma curva se a ordem da primeira derivada que não se anula, no desenvolvimento de Taylor é *par*.

Se n é par e m é ímpar, então a cúspide é dita do primeiro tipo.

Se n e m são pares tais que $n < m$, o ponto singular é uma cúspide do segundo tipo.

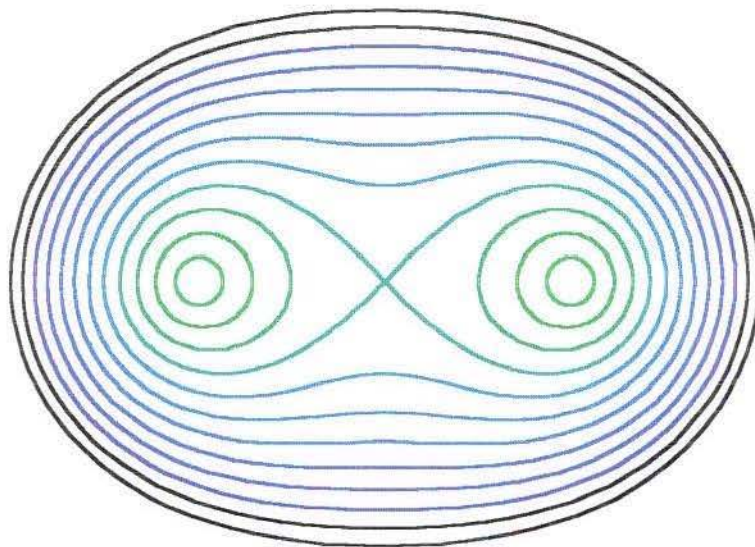
Se n e m são pares tais que $n = m$, o ponto singular é também cúspide do segundo tipo

Nas *figura 17*, percebe-se que a cúspide é do primeiro tipo, enquanto que a da *figura 18* é do segundo tipo.

CAPÍTULO II

CURVAS PLANAS:

CURVATURA, VÉRTICE E EVOLUTA



2.1 Introdução

O resultado a seguir discute a relação entre extremos da curvatura, cúspides da evoluta e caracteriza o fato de que, exceto nos pontos de vértice, o círculo osculador "cruza" a curva.

Teorema I

Dada uma curva regular plana $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^3 , parametrizada por comprimento de arco, são equivalentes as seguintes condições para um ponto $\alpha(a)$ desde que $k'(a)k(a) \neq 0$:

- (1) *a é um ponto de máximo ou mínimo local para a função curvatura;*
- (2) *a é um ponto de mudança de sinal da função derivada da curvatura, isto é, a é um vértice de α ;*
- (3) *a é um ponto de cúspide para a evoluta de α ;*
- (4) *O círculo osculador à curva em $\alpha(a)$ fica, localmente, de um único lado da curva, isto é, a curva é localmente, interior ou exterior a seu círculo osculador neste ponto.*

Demonstração:

(1) \Rightarrow (2)

Por hipótese, $a \in I$ é ponto de máximo local de $k(s)$, isto é, $k(s) < k(a)$, para qualquer $s \neq a$ numa vizinhança suficientemente pequena, W , de a .

Suponha que $k'(s) > 0$, em W , exceto que possivelmente $k(a) = 0$. Então $k(s)$ é crescente em W , e, com isso, para $b > a$ em W tem-se que $k(a) < k(b)$ contradizendo o fato de a ser máximo local da função $k(s)$. Portanto, a é um vértice de α .

O raciocínio é análogo para $k'(s) < 0$ em W , exceto que possivelmente $k(a) = 0$.



$$(2) \Rightarrow (1)$$

A hipótese agora é que a é um ponto de mudança de sinal da função $k'(s)$.

Suponhamos que, para $s < a$, $k'(s) < 0$ e, para $s > a$, $k'(s) > 0$ em W . Desse modo, $k(s)$ é decrescente para $s < a$ e $k(s)$ é crescente para $s > a$ em W . Ou seja, $k(s) > k(a)$, para cada s em W , vizinhança de a . Logo, a é ponto de mínimo local de $k(s)$.

A demonstração segue o mesmo raciocínio para $k'(s)$ mudando de sinal de maneira inversa.

Conclusão: Das duas implicações acima, vale a equivalência entre (1) e (2).



$$(2) \Rightarrow (3)$$

A evoluta de α é definida por $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s)$, onde $n(s)$ é o vetor normal unitário de α em s .

Como $\beta'(s) = \alpha'(s) - \frac{k'(s)}{k(s)^2}n(s) + \frac{1}{k(s)}n'(s) = \alpha'(s) - \frac{k'(s)}{k(s)^2}n(s) + \frac{1}{k(s)}k(s)\alpha'(s) = -\frac{k'(s)}{k(s)^2}n(s)$, então, o vetor tangente unitário de β é:

$$t_\beta(s) = \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} = -\left(\frac{k(s)^2}{|k'(s)|}\right) \cdot \frac{k'(s)}{k(s)^2}n(s) = -\frac{k'(s)}{|k'(s)|}n(s)$$

Por hipótese, $k'(s)$ muda de sinal em a . Suponha, sem perda de generalidade, que, para $s < a$, $k'(s) < 0$ e, para $s > a$, $k'(s) > 0$ em W .

Desse modo, quando $s \rightarrow a^-$, é certo que $s < a$, e conseqüentemente, $k'(s) < 0$, ou ainda, $|k'(s)| = -k'(s)$.

Com isso,

$$\lim_{s \rightarrow a^-} t_\beta(s) = \lim_{s \rightarrow a^-} -\frac{k'(s)}{|k'(s)|}n(s) = \lim_{s \rightarrow a^-} n(s) = n(a).$$

Por outro lado, quando $s \rightarrow a^+$, ocorre $s > a$, e conseqüentemente, $k'(s) > 0$, ou seja, $|k'(s)| = k'(s)$.

Por isso,

$$\lim_{s \rightarrow a^+} t_\beta(s) = \lim_{s \rightarrow a^+} - \frac{k'(s)}{|k'(s)|} n(s) = \lim_{s \rightarrow a^+} -n(s) = -n(a).$$

Logo, $\lim_{s \rightarrow a^-} t_\beta(s) = -\lim_{s \rightarrow a^+} t_\beta(s) = n(a) \neq 0$, pois a é regular.

Observemos também que, $\beta'(a) = -\frac{k'(a)}{k(a)^2} n(a) = -\frac{0}{k^2(a)} n(a) = 0$.

Conclusão: β tem cúspide em a .



(3) \Rightarrow (2)

Suponhamos que a é um ponto de cúspide da evoluta.

Então, por definição, $\beta'(a) = 0$, pois $t_\beta(s) = \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|}$. Mas, $\beta'(s_0) = -\frac{k'(a)}{k(a)^2} n(a)$ e $n(a) \neq 0$,

pois a é regular.

Logo, $k'(a) = 0$, ou seja, a é ponto crítico de β . Resta provarmos que é um ponto de máximo ou de mínimo local da função curvatura de α .

Para isso, considere ainda da definição de cúspide:

$$\lim_{s \rightarrow a^-} t_\beta(s) = \lim_{s \rightarrow a^-} - \frac{k'(s)}{|k'(s)|} n(s) = v, \text{ e} \quad (A)$$

$$\lim_{s \rightarrow a^+} t_\beta(s) = \lim_{s \rightarrow a^+} - \frac{k'(s)}{|k'(s)|} n(s) = -v \quad (B)$$

Se $k'(s) < 0$, quando $s < a$, então $|k'(s)| = -k'(s)$ para $s < a$ em W e $v = n(a) \neq 0$ em (A).

Caso não ocorra a mudança de sinal quando $s > a$ em W , continua valendo que $|k'(s)| = -k'(s)$

e, $\lim_{s \rightarrow a^+} - \frac{k'(s)}{|k'(s)|} n(s) = v = n(a) \neq 0$, contradizendo (B).

Do mesmo modo, se $k'(s) > 0$, quando $s < a$, então $|k'(s)| = k'(s)$ para $s < a$ em W e $v = -n(a) \neq 0$ em (A).

Caso não ocorra a mudança de sinal quando $s > a$ em W , continua valendo que $|k'(s)| = k'(s)$

e, $\lim_{s \rightarrow a^+} - \frac{k'(s)}{|k'(s)|} n(s) = v = -n(a) \neq 0$, contradizendo (B) novamente.

Conclusão: $k'(s)$ muda de sinal em a e (2) acaba de ser provado a partir de (3).

(2) \Leftrightarrow (4)

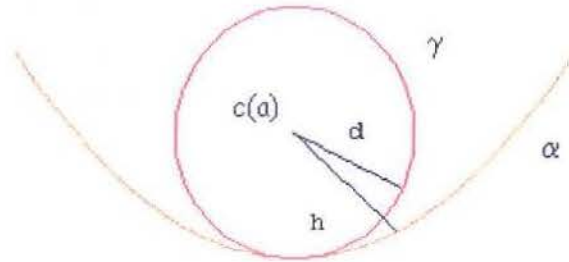


fig. 2.1

O círculo osculador γ de α em $a \in I$ é o círculo de centro

$$c(a) = \alpha(a) + r(a)n(a) \text{ e raio } r(a) = \frac{1}{k(a)}.$$

Primeiramente, observemos que a distância de $c(a)$ até a curva α , numa vizinhança de a é

dado por $h = \left| \alpha(s) - \alpha(a) - \frac{1}{k(a)}n(a) \right|$ e, como γ é um círculo, a distância de $c(a)$ até qualquer ponto $\gamma(s)$ é $d = \frac{1}{k(a)}$.

Mostrar a implicação indicada é equivalente a provar que:

(*) Se $k.k' > 0$ ou $k.k' < 0$, então o círculo osculador não fica do mesmo lado de α numa vizinhança de a .

A idéia é mostrar que a diferença $d - h$ muda de sinal para s suficientemente próximo de a . Mas, se $d - h$ muda de sinal para s perto de a , então $(d - h)(d + h) = d^2 - h^2$ também muda, pois d e h são positivos.

Para isso, considere o desenvolvimento de Taylor para α numa vizinhança de a :

$$\alpha(s) - \alpha(a) = \frac{\alpha'(a)}{1!}(s-a) + \frac{\alpha''(a)}{2!}(s-a)^2 + \frac{\alpha'''(a)}{3!}(s-a)^3 + R(a),$$

$$\text{onde } \frac{R(s)}{(s-a)^3} \rightarrow 0, \text{ quando } s \rightarrow a.$$

Mas, $\alpha'(a) = t(a)$, $\alpha''(a) = t'(a) = k(a)n(a)$ e $\alpha'''(a) = k'(a)n(a) - k^2(a)t(a)$, então:

$$\alpha(s) - \alpha(a) = \frac{t(a)}{1!}(s-a) + \frac{k(a)n(a)}{2!}(s-a)^2 + \frac{(k'(a)n(a) - k^2(a)t(a))}{3!}(s-a)^3 + R(s), \quad (i)$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } d^2 - h^2 &= \left(\alpha(s) - \alpha(a) - \frac{1}{k(a)}n(a) \right)^2 - \left(\frac{1}{k(a)}n(a) \right)^2 = \\ &= \left(\alpha(s) - \alpha(a) - \frac{2}{k(a)}n(a) \right) \left(\alpha(s) - \alpha(a) \right) = -\frac{k'(a)}{6k(a)}(s-a)^3 + \tilde{R}(s), \end{aligned}$$

onde $\frac{\tilde{R}(s)}{(s-a)^3} \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \lim_{s \rightarrow a} \frac{d^2 - h^2}{(s-a)^3} &= \lim_{s \rightarrow a} -\frac{k'(a)}{6k(a)} + \lim_{s \rightarrow a} \frac{\tilde{R}(s)}{(s-a)^3} = \\ &= -\frac{k'(a)}{6k(a)} + \lim_{s \rightarrow a} \frac{\tilde{R}(s)}{(s-a)^3} = -\frac{k'(a)}{6k(a)} \quad (ii) \end{aligned}$$

Supondo que $k'(a) \neq 0$ e $k(a).k'(a) > 0$. Pela expressão obtida em (ii), $d^2 - h^2$ muda do sinal negativo para o positivo numa vizinhança de a , ou seja, $d - h < 0$ para $s < a$ e, assim sendo, o círculo osculador tem pontos do lado externo da curva. Para $s > a$, ocorre $d - h > 0$, ou seja, γ tem pontos do lado interno da curva. Conseqüentemente, o círculo osculador tem pontos nos dois lados de α .

Com o mesmo raciocínio para $k'(a) \neq 0$ e $k(a).k'(a) < 0$, podemos concluir que o círculo osculador tem pontos dos dois lados da curva. Com isso vale (*), e portanto, a implicação $(2) \Rightarrow (4)$ é verdadeira.



$$(4) \Rightarrow (2)$$

Ainda considerando (ii), se o círculo osculador γ fica, localmente do mesmo lado de α , então $d^2 - h^2$ não muda de sinal em a . Supondo que $d^2 - h^2 > 0$, então, $\frac{d^2 - h^2}{(s-a)^3} < 0$ para $s < a$ e $\lim_{s \rightarrow a} \frac{d^2 - h^2}{(s-a)^3} = -\frac{k'(a)}{6k(a)} \leq 0$.

Por outro lado, para $s > a$, $\frac{d^2 - h^2}{(s - a)^3} > 0$ e $\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{d^2 - h^2}{(s - a)^3} = -\frac{k'(a)}{6k(a)} \geq 0$.

Logo, $k'(a) = 0$. Como estamos admitindo $k''(a) \neq 0$, teremos, necessariamente um ponto de extremo local para a função curvatura.

Se $d^2 - h^2 < 0$, o raciocínio é análogo.

Considerando a última conclusão, fica demonstrada a implicação $(4) \Rightarrow (2)$ e, conseqüentemente, a equivalência $(4) \Leftrightarrow (2)$.

■

Exemplo:

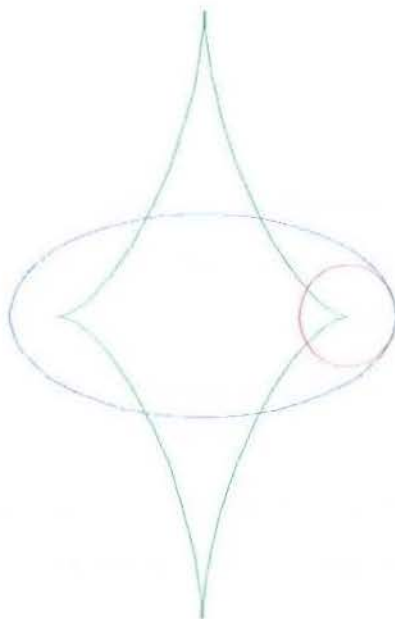


fig 2.2

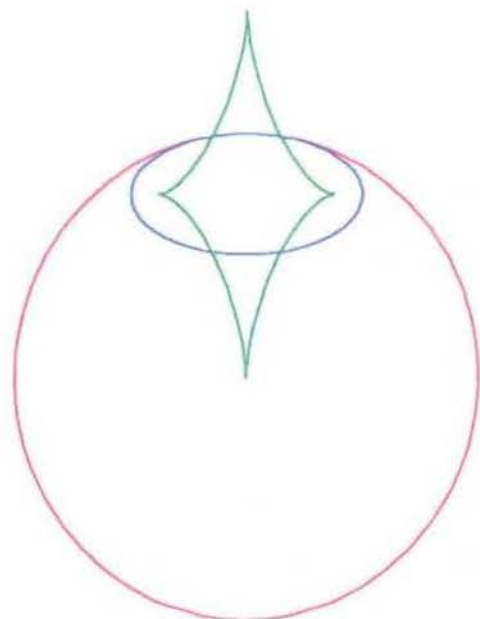


fig 2.3

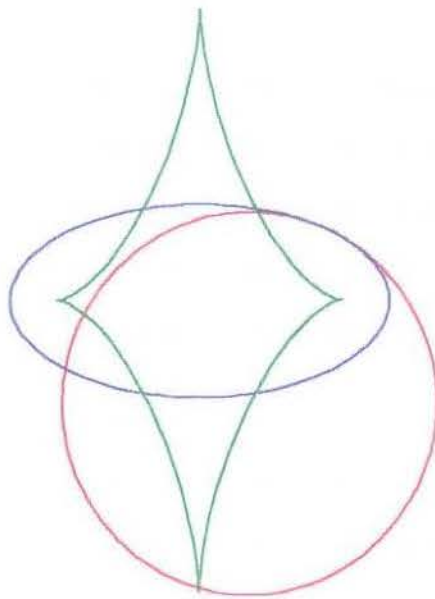


fig.2.4

Podemos ilustrar as equivalências anteriores usando as figuras 2.2, 2.3 e 2.4, onde são mostradas a elipse, sua evoluta e um de seus círculos osculadores.

Podemos notar que, na *figura 2.2*, ($s = 0$) o círculo osculador pertence à região interna da elipse.

Isto se deve ao fato de que, neste ponto, a função curvatura da elipse assume seu valor máximo, e ainda, para este mesmo ponto, a evoluta apresenta uma cúspide.

Para $s = \frac{\pi}{4}$, (na *figura 2.3*) a função curvatura assume seu valor mínimo e, portanto, o raio do círculo osculador é máximo. Conseqüentemente, como previsto pelo teorema, o círculo osculador fica do lado externo da elipse e a evoluta tem outra cúspide.

Na *figura 2.4*, ($s = \frac{\pi}{2}$) o círculo osculador não permanece, localmente, do mesmo lado da elipse, o que é previsível, uma vez que o valor da curvatura neste ponto não é máximo e nem mínimo local. Quanto à evoluta, esta não apresenta cúspides para este ponto.

2.2- Convexidade

Uma curva é convexa quando, para todo ponto ela está contida em um semi-plano determinado pela reta tangente. Um resultado decorrente da fórmula de Taylor é que, uma curva com curvatura estritamente positiva ou negativa, localmente, fica de um só lado de sua reta tangente. Na verdade, o resultado pode ser muito mais abrangente. Uma curva plana é convexa se, e só se sua curvatura não muda de sinal. Provaremos, a seguir, estas implicações.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, onde $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$, curva simples, plana regular parametrizada por comprimento de arco. Seja $\Omega(A, B)$, corda de $A = \alpha(a)$ até $B = \alpha(a + h)$, $h \in \mathbb{R}^+$, e $K : I \rightarrow \mathbb{R}$, a função curvatura de α .

Lema 1

Se $\Omega(A, B)$ é corda de $A = \alpha(a)$ até $B = \alpha(a + h)$, $h \in \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$, então existe $c \in [a, a + h]$ tal que o vetor tangente de α em c é múltiplo positivo de $\Omega(A, B)$.

Demonstração:

Seja $\mathbf{t} : I \rightarrow S^1$ a indicatriz tangente de α .

Sem perda de generalidade, considere $A = (0, 0) = \alpha(a)$, $B = (b, 0) = \alpha(a + h)$.

Caso - 1 :

Se α é uma reta, então é reta passando por A e B , logo, o vetor tangente $\mathbf{t}(s) = (1, 0)$ é diretor de α para cada $s \in I$. Como $\mathbf{t}(s) = (1, 0)$ é paralelo à corda $\Omega(A, B)$, basta tomar $\mathbf{t}(s_0) = (1, 0)$ para qualquer s_0 em $[a, a + h]$.

Caso - 2:

Se α não é uma reta, então $y(s)$ é função real contínua tal que $y(a) = y(a+h) = 0$.

e existe um ponto $c \in (a, a+h)$ máximo e um mínimo absoluto de maneira que $y'(c) = 0$.

Logo, $\alpha'(c) = (x'(c), 0)$ e, com isso, o vetor tangente a α em c ,

unitário é dado por:

$$\mathbf{t}(c) = \frac{(x'(c), 0)}{|(x'(c), 0)|} = \left(\frac{x'(c)}{|x'(c)|}, 0 \right) = (1, 0).$$

Para uma posição arbitrária de $\Omega(A, B)$, considere $\Omega(A, B)$ e o arco de curva $\alpha([a, a+h])$. Seja θ_0 o ângulo entre a reta suporte de $\Omega(A, B)$ e o eixo x . Rotacionando-se em torno de P no sentido apropriado de θ_0 a corda $\Omega(A, B)$ e o arco de curva $\alpha([a, a+h])$ obtem-se $\beta([a, a+h]) = R_{\theta_0}^P \cdot \alpha([a, a+h])$, onde $R_{\theta_0}^P$ é a matriz de rotação de θ_0 .

Com isso, se $\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s))$ então, $\beta_2(a) = \beta_2(a+h) = 0$. Pelo *caso-1*, existe $c \in (a, a+h)$ tal que o vetor tangente de β em c é paralelo à $(1, 0)$. Então, rotacionando-se, no sentido contrário à primeira rotação, de θ_0 o arco de curva $\beta([a, a+h])$ tem-se que existe $c_1 = R_{-\theta_0}^P(c) \in (a, a+h)$, que é o ponto procurado.

■

Lema II

Se $\alpha([s, s+h]) \cap \Omega(A, B) = \{c\}$, então a curvatura muda de sinal para algum $s \in [s, s+h]$.

Demonstração:

Caso 1:

Suponhamos que $\alpha([s, s+h]) \cap \Omega(A, B) = \{C\}$, $c \in I$, $A = \alpha(s)$, $B = \alpha(s+h)$ e $C = \alpha(s_1)$, $s_1 \in [s, s+h]$.

Como $C \in \alpha([s, s+h]) \cap \Omega(A, B)$, então $C \in \alpha(I)$ e, com isso, $\Omega(A, C)$ e $\Omega(C, B)$ são cordas dos arcos $\alpha([s, s_1])$ e $\alpha([s_1, s+h])$ respectivamente. Então, pelo *Lema*, existe $c_0 \in (s, c)$ e existe $c_1 \in (s, s+h)$, tais que o vetor tangente de α em c_0 , $\mathbf{t}(c_0)$, é paralelo à corda $\Omega(A, C)$ e o vetor tangente a α em c_1 , $\mathbf{t}(s_1)$, é paralelo a corda $\Omega(C, B)$, isto é, existem $c_0, c_1 \in (s, s+h) - \{s_1\}$ distintos, tais que os ângulos θ_0 e θ_1 entre a corda $\Omega(A, B)$ e os vetores tangentes $\mathbf{t}(c_0)$ e $\mathbf{t}(c_1)$ é

nulo.

Seja $\theta(s)$ a função ângulo entre os vetores tangentes e o eixo orientado por $\Omega(A, B)$.

Além de diferenciável, θ é não nula com $\theta(c_0) = \theta(c_1) = 0$, definida em I , compacto. Logo, θ admite máximo e mínimo distintos em I , e conseqüentemente, existem d_0 e $d_1 \in I$, distintos, tais que a função derivada de θ muda de sinal em d_0 e d_1 . Mas a função derivada de θ nada mais é que a curvatura de α .

Teorema

Uma curva regular simples fechada de classe C^3 é convexa se, e somente se, sua curvatura não muda de sinal.

Demonstração.

Suponhamos que a curva não seja convexa. Então existe um ponto c nas condições do Lema 2 e, portanto, a curvatura muda de sinal. Reciprocamente, se a curvatura muda de sinal num ponto, do polinômio de Taylor, concluímos que a curva corta a reta tangente neste ponto.



2.2.1 Curvatura e Posição relativa entre Curvas

Nesta seção, estudaremos até que ponto o valor da função curvatura de duas curvas, com mesmo vetor tangente num ponto, influi na posição de uma em relação à outra, localmente.

Sejam $\alpha, \beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares parametrizadas por comprimento de arco, tais que $\alpha(a) = \beta(a)$ para algum $a \in I$, $t_\alpha(a) = t_\beta(a)$, isto é, os vetores tangentes de α e β em a coincidem, $K_\alpha, K_\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$, suas respectivas funções curvaturas.

Dizer que α fica do mesmo lado de β numa vizinhança de um ponto a , é equivalente a dizer que $((\alpha(s) - \alpha(a)) - (\beta(s) - \beta(a))) \cdot n(a) > 0$ para $s \neq a$ na vizinhança de a isto é, α fica mais longe da reta tangente em a do que β para $s \neq a$.

Teorema III

Se α permanece do mesmo lado de β e mais distante da reta tangente numa vizinhança de a , então $K_\alpha(a) \geq K_\beta(a)$.

Demonstração:

Denotando por $n_\alpha(a)$ e $n_\beta(a)$ os vetores normais de α e β em a , respectivamente, é verdade que $n_\alpha(a) = n_\beta(a) = n(a)$, pois os vetores normais são definidos como sendo os tangentes rotacionados de 90 graus no mesmo sentido e, que, neste caso, coincidem.

Temos, por hipótese que $((\alpha(s) - \alpha(a)) - (\beta(s) - \beta(a))) \cdot n(a) > 0$ para $s \neq a$ na vizinhança de a .

Pelo desenvolvimento de Taylor para α e β numa vizinhança de a :

$$\alpha(s) - \alpha(a) = \frac{t_\alpha(a)}{1!}(s-a) + \frac{k_\alpha(a)n_\alpha(a)}{2!}(s-a)^2 + R_\alpha(s), \text{ onde } \frac{R_\alpha(s)}{s^2} \rightarrow 0,$$

quando $s \rightarrow a$ e

$$\beta(s) - \beta(a) = \frac{t_\beta(a)}{1!}(s-a) + \frac{k_\beta(a)n_\beta(a)}{2!}(s-a)^2 + R_\beta(s), \text{ onde } \frac{R_\beta(s)}{s^2} \rightarrow 0,$$

quando $s \rightarrow a$.

Logo,

$$\begin{aligned} (\alpha(s) - \alpha(a)) - (\beta(s) - \beta(a)) &= \left(\frac{t_\alpha(a)}{1!}(s-a) + \frac{k_\alpha(a)n_\alpha(a)}{2!}(s-a)^2 + R_\alpha(s) \right) - \\ &\left(\frac{t_\beta(a)}{1!}(s-a) + \frac{k_\beta(a)n_\beta(a)}{2!}(s-a)^2 + R_\beta(s) \right) = (k_\alpha(a) - k_\beta(a)) \frac{n(a)}{2!}(s-a)^2 + \\ &+ (R_\alpha(s) - R_\beta(s)), \text{ pois } t_\alpha(a) = t_\beta(a) \text{ e } n_\alpha(a) = n_\beta(a) = n(a) \text{ por hipótese.} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (I) \quad &\frac{1}{(s-a)^2} ((\alpha(s) - \alpha(a)) - (\beta(s) - \beta(a))) \cdot n(a) = \\ &= \frac{1}{(s-a)^2} ((k_\beta(a) - k_\alpha(a)) \frac{n(a)}{2!}(s-a)^2 + (R_\alpha(s) - R_\beta(s))) \cdot n(a) = \\ &= \frac{1}{2} (k_\beta(a) - k_\alpha(a)) + \frac{(R_\alpha(s) - R_\beta(s))}{(s-a)^2} \cdot n(a) > 0, \text{ usando a hipótese.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } 0 &\leq \lim_{s \rightarrow a} \frac{1}{(s-a)^2} [(\alpha(s) - \alpha(a)) - \beta(s) - \beta(a)] \cdot n(a) = \\ &= \lim_{s \rightarrow a} \frac{1}{2} (k_\alpha(a) - k_\beta(a)) + \frac{(R_\alpha(s) - R_\beta(s))}{(s-a)^2} \cdot n(a) = \frac{1}{2} (k_\alpha(a) - k_\beta(a)) + \\ &+ \lim_{s \rightarrow a} \frac{(R_\alpha(s) - R_\beta(s))}{(s-a)^2} \cdot n(a) = \frac{1}{2} (k_\alpha(a) - k_\beta(a)). \end{aligned}$$

Mas, sabemos que se β fica mais próxima de sua reta tangente em $\beta(a)$, então $(I) > 0$ numa vizinhança de a . Logo, $k_\alpha(a) > k_\beta(a)$.

Por outro lado, se $k_\alpha(a) > k_\beta(a)$, então β fica do mesmo lado de α numa vizinhança de a .

Então, acabamos de provar o

Teorema IV Se $K_\alpha > K_\beta$ então α permanece do mesmo lado de β

numa vizinhança de a .

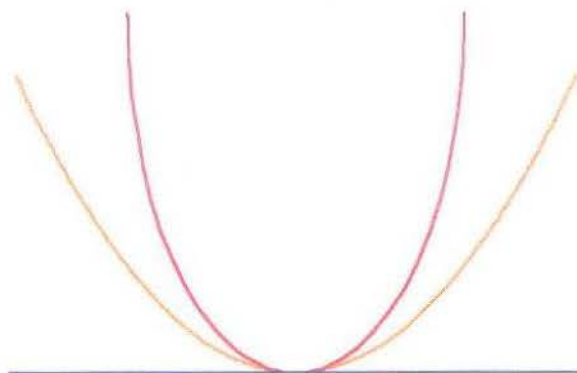


fig. 2.5

Podemos ilustrar as duas proposições acima com a situação descrita na *figura 2.5*.

Nesta figura, a curva vermelha é um arco de parábola dada pela parametrização:

$p : [-1,7, 1,7) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $p(t) = (t, t^2)$ e a curva laranja é um arco de circunferência parametrizado por:

$$c : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ onde } c(t) = 0.3(\text{sent}, -\cos t) + (0, +0.3)$$

Note que $c(0) = p(0) = 0$. As duas curvas se tocam no ponto $(0, 0)$ com vetores tangentes:

$$\mathbf{t}_p(t) = \frac{(1, 2t)}{\sqrt{1+4t^2}} \text{ e } \mathbf{t}_c(t) = (\cos t, \text{sent} t).$$

Quando aplicados em $(0, 0)$: $\mathbf{t}_p(0) = (1, 0)$ e $\mathbf{t}_c(0) = (1, 0)$ e vetores normais

$$\mathbf{n}_p(t) = \frac{(-2t, 1)}{\sqrt{1+4t^2}} \text{ e } \mathbf{n}_c(t) = (-\text{sent} t, \cos t)$$

Desenvolvendo o polinômio de Taylor de c e p em torno de 0:

$$p(t) = \frac{(1, 0)}{1!}t + \frac{(0, 2)}{2!}t^2 + R_\alpha(t) \text{ e } c(t) = \frac{(1, 0)}{1!}t + \frac{(0, 1)}{2!}t^2 + R_\beta(t) \text{ onde}$$

$$\frac{R_\alpha(t)}{t^2}, \frac{R_\beta(t)}{t^2} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0.$$

$$\text{Assim, } \frac{((p(t) - p(0)) - (c(t) - c(0))) \cdot \mathbf{n}(0)}{t^2} = \frac{(p(t) - c(t)) \cdot (0, 1)}{t^2} =$$

$$= \frac{(\frac{(0,1)}{2!}t^2 - R_\beta(t) + R_\alpha(t)) \cdot (0,1)}{t^2} = (\frac{(0,1)}{2!} + \frac{-R_\beta(t) + R_\alpha(t)}{t^2}) \cdot (0,1) = \frac{1}{2} > 0$$

Portanto, $c(t)$ fica, numa vizinhança de $(0,0)$, do mesmo lado de $p(t)$ como indica a figura. 2.5

Logo, aplicando a *Teorema III* deste capítulo, $K_c(0) \geq K_p(0)$. (1)

Por outro lado, olhando para os valores das funções curvaturas:

$$K_p(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ e } K_c(t) = \frac{10}{3}. \text{ Logo, } K_p(0) = 2 \leq \frac{10}{3} = K_c(0)$$

e, se não tivéssemos concluído (1) a pouco, poderíamos concluí-lo agora usando a *Teorema III*.

Observação:

A condição de mesma curvatura para duas curvas, pode ocorrer com todas as hipóteses possíveis, isto é, α ou β podem estar mais próximas da tangente ou podem se cruzar neste ponto, como ocorre com o círculo osculador de uma curva num ponto que não é vértice.

2.3 Teorema dos 4 ou mais vértices (V)

(R. Ossermand, 1985)

O Teorema dos Quatro Vértices em sua forma clássica, afirma que toda curva regular simples e fechada tem, pelo menos, quatro vértices. O teorema a seguir relaciona o número de vértices de uma curva plana com o número de vezes que esta toca em seu círculo circunscrito.

O círculo circunscrito de uma curva fechada plana é o círculo com raio mínimo de maneira que a curva fica totalmente contida no disco que este determina.

Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^3 , curva plana regular fechada simples e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, seu círculo circunscrito, γ e α com mesma orientação, e k a função curvatura de α . Se a cardinalidade de $\alpha(I) \cap \gamma(I)$ é um número finito $n \in \mathbb{N}$, então:

- i) $n \geq 2$;
- ii) α tem, no mínimo, $2n$ vértices.

Demonstração : Os quatro lemas a seguir são fundamentais para esta demonstração.

Lema I

Sejam E um subconjunto compacto do plano com, no mínimo, dois pontos e

$\zeta = \{C_r\}_{r \in \mathbb{R}_+^*}$ a família de todos os círculos do plano de raio r de maneira que os discos fechados limitados por estes círculos contenham E .

Nessas condições, existe um elemento de ζ com raio mínimo, ou seja, existe um número real positivo r_0 tal que o disco limitado por C_{r_0} contém E e não existe $r_1 \in \mathbb{R}_+^*$, tal que o disco limitado por C_{r_1} contenha E . (Este é chamado círculo circunscrito)

Lema II

Se C é o círculo circunscrito a E , então qualquer arco de C , maior que um semi-círculo, intercepta E em pelo menos dois pontos.

Lema III

Seja α uma curva plana regular que tem o mesmo vetor tangente unitário num ponto P e mesma orientação que um círculo, γ de raio r . A curvatura de γ é k e $k > \frac{1}{r}$ numa vizinhança de s_0 , se α fica do mesmo lado de γ .

Lema IV

Sejam $\alpha(I) \cap \gamma(I) = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ ordenados sobre $\gamma(I)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ arcos de $\gamma(I)$ tais que α_j é limitado por p_j e p_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, n$ e r o raio do círculo circunscrito de α . Então, cada um dos arcos α_j fica em γ ou possui um ponto Q_j no qual o valor da curvatura de α é menor que $\frac{1}{r}$.

Com a validade desses três lemas pode ser feita a demonstração do teorema.

Demonstração do Teorema V

Sejam α uma curva plana regular fechada simples, γ , seu círculo circunscrito e r o raio deste.

Diretamente do Lema 2 tem-se que a primeira parte do teorema é válida, pois se $\alpha(I) \cap \gamma(I) = \{p\}$, isto é, $\alpha(I) \cap \gamma(I)$ tem somente um elemento, tome $\gamma(I) - \{p\}$, e com isso, existe um arco de γ , maior que meio círculo, que não intercepta $\alpha(I)$.

Para a prova da parte (ii), considere $\alpha(I) \cap \gamma(I) = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ ordenados sobre $\gamma(I)$.

Assim, tais pontos definem n arcos de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ de $\gamma(I)$ onde α_j é limitado por p_j e p_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, n$.

Pelo Lema 4, cada um dos arcos α_j fica em γ ou possui um ponto q_j no qual ocorre: (q_j)
 $< \frac{1}{r}$. (*)

Da hipótese, α e γ estão positivamente orientadas e, por isso, α e γ tem a mesma orientação em cada p_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Além disso, α fica, localmente, do mesmo lado ou sobre α , então, pelo Lema III,

$$k(p_j) \geq \frac{1}{r} \text{ para } j = 1, 2, \dots, n. \quad (**)$$

Assim, $\frac{1}{r} > k(p_j) \geq \frac{1}{r}$ para $j=1, 2, \dots, n$ e k é contínua, Logo, existe um ponto q_j de mínimo em cada γ_j tais que $k(q_j) < \frac{1}{r}$. Com isso, conclui-se que existem n vértices para α . Por outro lado, considerando os n arcos β_j com extremos q_j e q_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, n$.

Então, pelo *Lema IV*, cada um dos arcos β_j tem um ponto v_j no qual ocorre $k(v_j) < \frac{1}{r}$.

Usando o fato de que cada β_j contém um p_j e $k(p_j) \geq \frac{1}{r}$ para $j = 1, 2, \dots, n$

Logo, existem n pontos de máximos distintos para k , isto é, α tem, no mínimo, mais n vértices além dos n anteriormente computados.

Conclusão: α tem, no mínimo $2n$ vértices.

Este teorema estende o Teorema dos Quatro Vértices, uma vez que, pelo *Lema II*, toda curva toca seu círculo circunscrito em, pelo menos, dois pontos. Além disso, estes dois pontos serão diametralmente opostos (como é o caso da elipse), que é uma situação muito especial. É por esta razão que [Ossermann] conjectura em seu artigo que seja possível colocar uma medida no conjunto das curvas de modo a assegurar que a " maioria " das curvas fechadas simples tenham, pelo menos, seis vértices.

Ilustração

Considere $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow IR^2$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $x, y : [0, 2\pi] \rightarrow IR$ (fig.2.5)

$$x(t) = (2 + \cos(3t)) \cos(t)$$

$$y(t) = (2 + \cos(3t)) \sin(t)$$

O círculo circunscrito de α é $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow IR^2$ tal que $\beta(t) = 3(\cos(t), \sin(t))$, pois

$$|\alpha(t)|^2 = ((2 + \cos(3t)) \cos(t))^2 + ((2 + \cos(3t)) \sin(t))^2 = (2 + \cos(3t))^2 \leq 9,$$

isto é, $|\alpha(t)| \leq 3$. E ainda mais, α e γ tem três pontos em comum, uma vez que $|\alpha(t)| = 3$

somente quando $\cos(3t) = 1$, isto é, para $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{3}$, $t_2 = \frac{2\pi}{3}$.

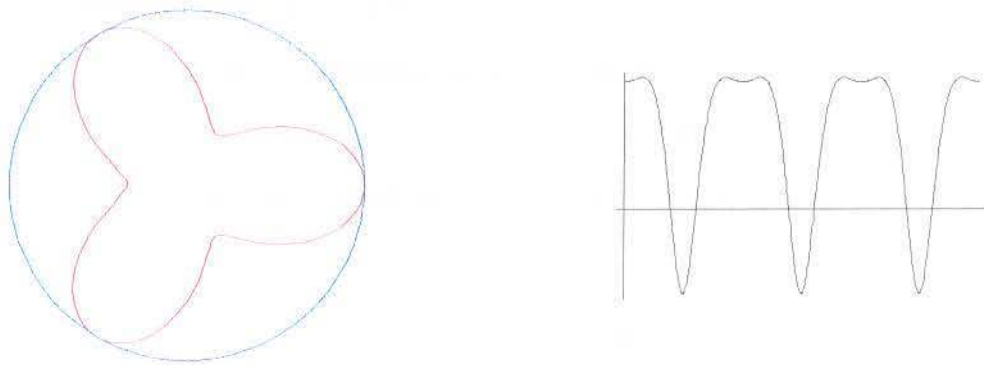


fig 2.5 Curva seu círculo circunscrito e função curvatura

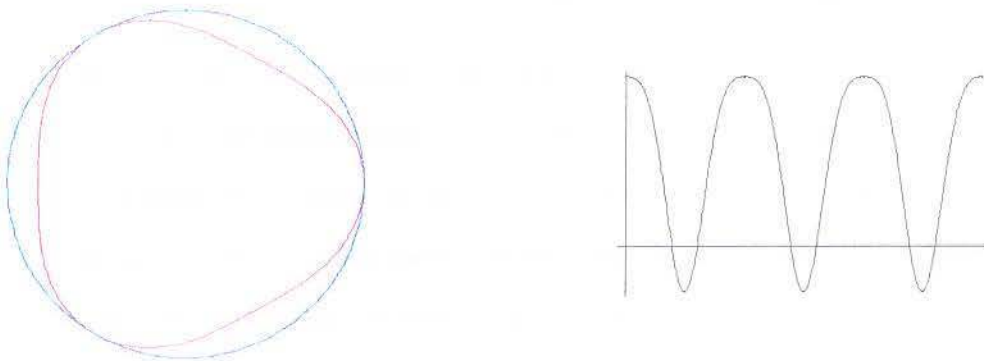


fig 2.6 Curva seu círculo circunscrito e função curvatura

A figura 2.5 é a curva:

$\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $x, y : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x(t) = (10.5 + \cos(3t)) \cos(t)$$

$$y(t) = (10.5 + \cos(3t)) \sin(t)$$

O círculo circunscrito de α é $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta(t) = 10.5(\cos(t), \sin(t))$,

pois, $|\beta(t)|^2 = ((10.5 + \cos(3t)) \cos(t))^2 + ((10.5 + \cos(3t)) \sin(t))^2 =$

$$(10.5 + \cos(3t))^2 \leq 11.5^2,$$

isto é, $|\beta(t)| \leq 11.5^2$. E ainda mais, β e γ tem três pontos em comum, uma vez que

$$|\beta(t)| = 11.5^2$$

somente quando $\cos(3t) = 1$, isto é, para $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{3}$, $t_2 = \frac{2\pi}{3}$.

A função curvatura de $\beta(t)$ se anula se, e só se, $124.25 + 115.5 \cos 3t - 4 \cos 16t = 0$ o que jamais ocorre, pois, $124.25 + 115.5 \cos 3t - 4 \cos 16t \geq 124.25 - 115.5 - 4 > 1 > 0$. Portanto, a curva é *convexa*.

Para maiores detalhes da demonstração do *Teorema V* ver [9]

2.4 Família das Cassinianas

A *elipse* é definida como sendo o conjunto dos pontos do plano cuja *soma* das distâncias a dois pontos fixos é uma constante. Conforme varia essa constante, as curvas apresentam um mesmo formato padrão, são sempre curvas simples, convexas, tendo assim funções curvaturas que não mudam de sinal e possuem o mesmo número de máximos e mínimos. Daí, usando o teorema do início do capítulo, observa-se que as evolutas também apresentam o mesmo formato e número de cúspides para cada curva em questão.

No entanto, essa situação pode ser alterada consideravelmente tomando a família de curvas definidas como o conjunto dos pontos do plano cujo *produto* das distâncias a dois pontos fixos (*focos*) é uma constante, a . Estas curvas são chamadas de *Cassinianas* e seus traços seguem o aspecto da figura 2.7:

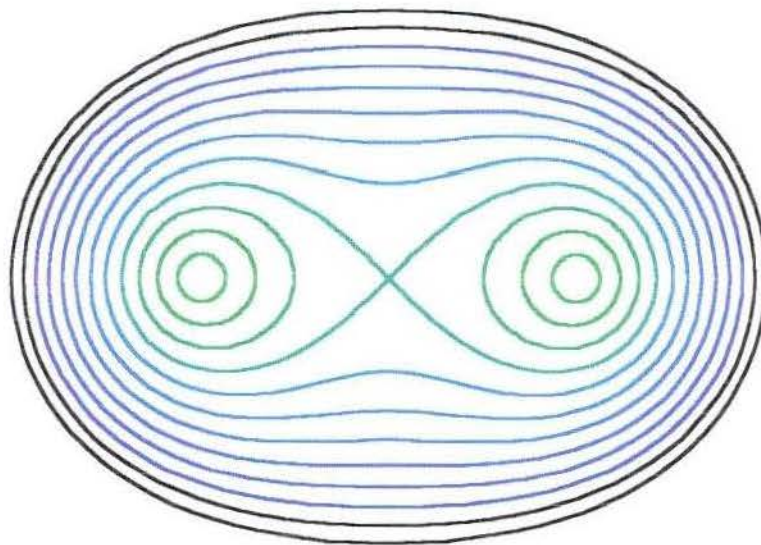


fig. 2.7 Cassinianas para distância focal 1 e $0 < a < 5$

Observando o traço dado acima para as Cassinianas, é simples notar que, para valores pequenos de a , as curvas Cassinianas são pares de *ovais* (convexas e simples).

Em determinado instante, as duas ovais se juntam num ponto formando uma curva *não simples*. Logo em seguida, tornam-se novamente curvas simples, porém não convexas, isto até certo ponto, pois, ao aumentarmos o valor de a suficientemente, elas transformam-se em curvas

convexas e, daí em diante, mantem um formato semelhante.

2.4.1 Histórico:

Giovanni Domenico Cassini (1625, Perinaldo-1712, Paris) foi um pesquisador italiano que iniciou uma dinastia conhecida por suas contribuições para a astronomia. Tornou-se professor da Universidade de Bolonha, e, em 1669, mudou para Paris. Em 1680, criou uma família de curvas, que acreditava descrever a trajetória da Terra em torno do Sol melhor que uma elipse. No entanto, essas curvas foram publicadas somente em 1749, por *Jacques Cassini*, filho de *Giovanni* e também notável astrônomo.

Mais tarde, tal família de curvas passou a ser conhecida por *Cassinianas*, ou ainda, *Ovais de Cassini*, apesar de que nem todas componentes desta família sejam ovais.

Dentre as *Cassinianas*, destaca-se em especial, a *Lemniscata de Bernoulli*, ou *Lemniscata* a única delas que não é curva simples. A *Lemniscata* foi publicada em 1694, pelo famoso matemático suíço *James Bernoulli* (1654-1705), pupilo de *Leibniz*, num artigo a respeito da teoria das marés. Por ser parecida com um oito ou um laço, *James* denominou-a por *lemniscus*. Esta curva tornou-se popular em 1718, quando o matemático italiano *Fagnano* (1682-1766) estabeleceu que a integral que determina o comprimento de arco da *Lemniscata* não é expresso em termo de funções elementares, e a *Lemniscata* nunca poderia ser dividida, com régua e compasso, em n arcos iguais, onde $n=2^m$, $n=3 \cdot 2^m$, ou $5 \cdot 2^m$, onde m é um inteiro positivo. Não havia sido notada a presença da *Lemniscata* na família das *Cassinianas* até 1806, quando outro matemático italiano, *Saladini* estabeleceu a identidade entre a figura "oito das *Cassinianas*" com a *Lemniscata de Bernoulli*.

2.4.2 Forma Paramétrica das Curvas Cassinianas

Usando a definição dada anteriormente, uma parametrização para as *Cassinianas* pode ser formulada da seguinte maneira:

Considere $F_1 = (b, 0)$ e $F_2 = (0, -b)$ tal que $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $a^2 \in \mathbb{R}_+^*$. A equação das *cassinianas* que têm por focos F_1 e F_2 é dada por:

$$|(x,y) - (b,0)| |(x,y) - (-b,0)| = a^2,$$

$$\text{logo,} \quad ((x-b)^2 + y^2)((x+b)^2 + y^2) = a^4, \quad (*)$$

e, conseqüentemente,

$$y^4 + 2(x^2 + b^2)y^2 + (x^2 - b^2)^2 - a^2 = 0.$$

Para obtermos uma equação paramétrica, consideraremos somente o sinal positivo para a solução da equação acima.

Fazendo $x(t) = r(t)\cos t$, $y(t) = r(t)\sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, obtem-se;

$$r(t)^2 = b^2 \cos 2t \pm \sqrt{a^4 - b^4 \sin^2 2t}.$$

E, portanto, para cada $a \in \mathbb{R}_+^*$, $c_a = r(t)(x(t), y(t))$.

Para $0 < a < 1$, $J = [-\arcsen((\frac{a}{b})^2), \arcsen((\frac{a}{b})^2)] \cap [-\pi, \pi]$

é a região onde $r(t)$ está definida, e, se o comprimento do segmento

$[0, \arcsen((\frac{a}{b})^2)] \cap [0, \frac{\pi}{2}]$ é dado por ε , então uma parametrização

para as Cassinianas é:

$$c_a : [-2\varepsilon, 2\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que}$$

$$c_a(t) = r(t + 2\varepsilon - \pi) \cdot (\cos(t + 2\varepsilon - \pi), \sin(t + 2\varepsilon - \pi)), \quad \text{se } t \in [-2\varepsilon, -\varepsilon]$$

$$c_a(t) = r(t) \cdot (\cos(t), \sin(t)), \quad \text{se } t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$c_a(t) = r(t + 2\varepsilon - \pi) \cdot (\cos(t + 2\varepsilon - \pi), \sin(t + 2\varepsilon - \pi)), \quad \text{se } t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$$

2.4.3 Análise Gráfica

Como, a menos de rotação e translação, sempre podemos tomar o foco das Cassinianas como da forma $(-b, 0)$ e $(b, 0)$ e além disto, uma Cassiniana de foco $(-b, 0)$, $(b, 0)$ e constante a^2 é sempre uma dilatação das Cassinianas de focos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e constante $\frac{a^2}{b^2}$, basta estudarmos as Cassinianas de focos $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

Consideraremos, a seguir, alguns exemplos especiais de modo a relatar as variações significativas entre elas, analisando concomitantemente sua evoluta e função curvatura.

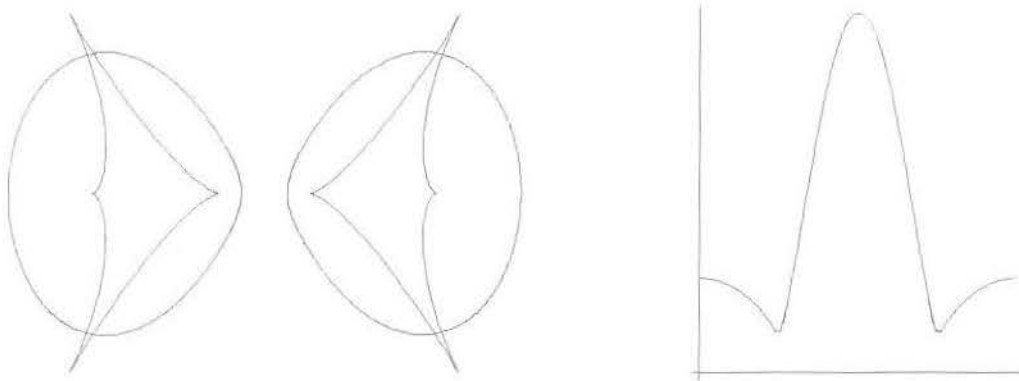


fig. 2.7 Cassiniana para $a = 0.9$, com sua evoluta e função curvatura.

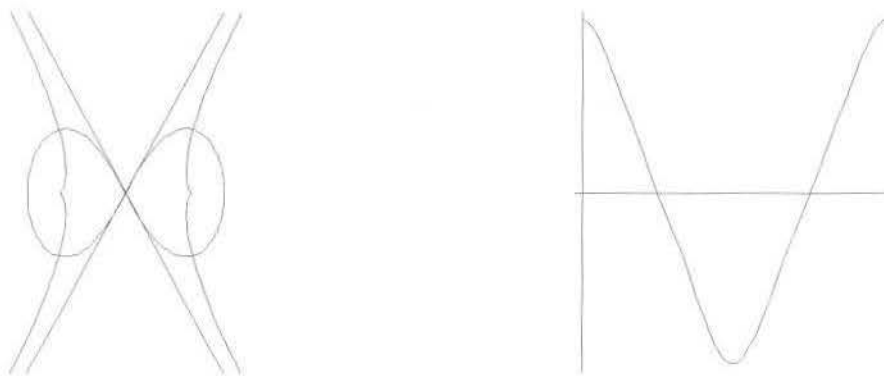


fig. 2.8 Cassiniana para $a = 1$, (Leminiscate) com sua evoluta e função curvatura.

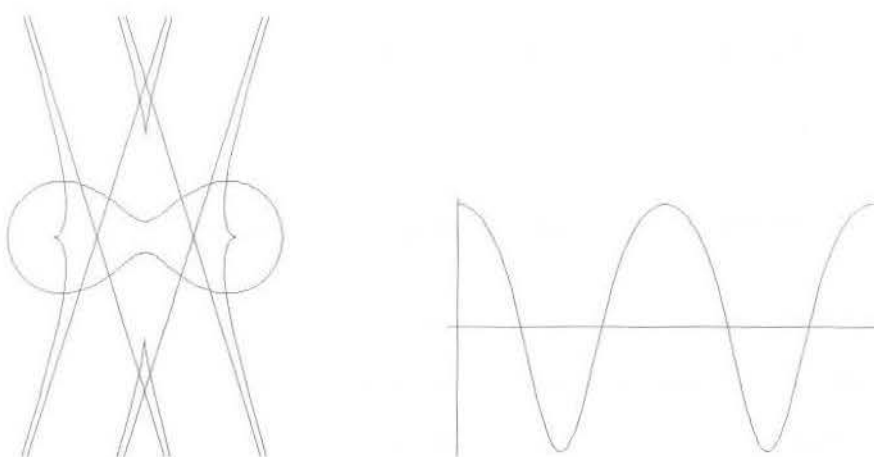


fig. 2.9 curva, evoluta e

curvatura para $a = 1.1$

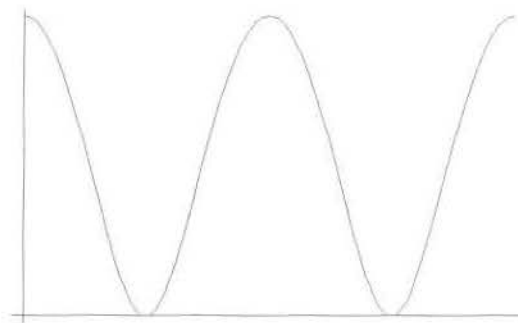
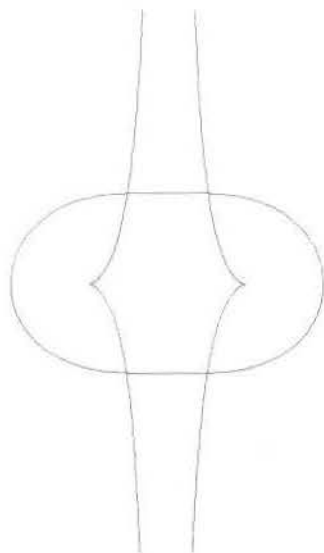


fig. 2.10 *Cassiniana e evoluta para $a = \sqrt{2}$*

curvatura para $a = \sqrt{2}$

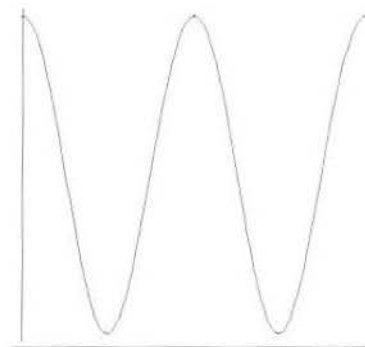
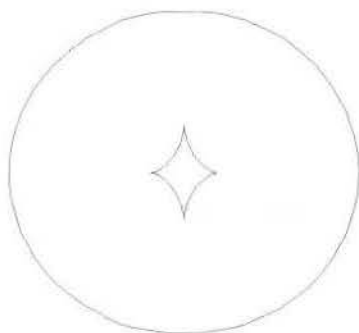


fig. 2.11 *Cassiniana para $a=20$, sua evoluta e função curvatura*

2.4.4 Análise da Curvatura e Evoluta

Analisando a família das funções curvaturas das Cassinianas podemos observar que:

- (1) Quando $0 < a < 1$, enquanto que as Cassinianas são duas ovais, simétricas em relação aos eixo que passa pelos focos e suas respectivas funções curvaturas, $k_a(s)$, sempre são, estritamente positivas apresentando dois máximos e dois mínimos locais. Logo, a família de evolutas tem

quatro cúspides e, como não há anulamentos de nenhuma das funções curvatura para $0 < a < 1$, as evolutas são curvas fechadas.

(2) Na medida em que a se aproxima de 1, as ovas se expandem e a distância entre elas diminui até que, quando $a=1$, a curva é a *Leminiscate de Bernoulli*, cuja função curvatura apresenta um máximo positivo e um mínimo negativo. Com isso, tal função se anula duas vezes. Devido a esses anulamentos, a evoluta apresentará dois rompimentos, deixando então de ser curva fechada e, por causa dos dois pontos extremos, surgirão duas cúspides.

(3) Se $1 < a < \sqrt{2}$, a família das Cassinianas volta a ser formada por curvas simples, porém não convexas, e suas funções curvaturas assumem dois valores máximos positivos e dois pontos de mínimos negativos. Com isso, aparecem quatro rompimentos da evoluta e quatro cúspides.

(4) Ao atingir o valor $a=\sqrt{2}$, as Cassinianas voltam a ser convexas $ek_a(s) \geq 0$, com dois anulamentos e dois máximos. Assim, o gráfico da evoluta apresenta duas cúspides bem definidas sobre o eixo das abscissas, e duas cúspides degeneradas sobre o eixo das ordenadas.

(5) Passando para $a > \sqrt{2}$, $k_a(s)$ é estritamente positiva com dois máximos e dois mínimos. Como as funções curvaturas deixam de se anular, o rompimento da evoluta desaparece e esta volta a apresentar quatro cúspides bem definidas.

(6) Para valores grandes de a , a função curvatura se aproxima da função constante e, conseqüentemente, as curvas Cassinianas de um círculo.

(7) Exceto pela Lemniscata, cada Cassiniana possui *quatro vértices*.

2.4.5 Prova dos sete fatos anteriores

A maioria dos itens a serem provados referem-se a propriedades da função curvatura das Cassinianas. Portanto, é preciso trabalhar com a expressão de tal função que será obtida no próximo parágrafo. Pela naturalidade como os resultados fluem a partir de certa altura da discussão, a demonstração dos sete fatos será feita fora da ordem enunciada.

Expressão para a função curvatura das Cassinianas

Considerando que cada curva da família das Cassinianas pode ser expressa na forma:

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$, então,

$$k(t) = \frac{\det \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\right)^3}$$

é a função curvatura de α .

Mas, a matriz que devemos usar para calcular o determinante do numerador é

$$\text{exatamente} \begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'(t) & r(t) \\ r''(t) - r(t) & 2r'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{Então, } \det \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} r'(t) & r(t) \\ r''(t) - r(t) & 2r'(t) \end{vmatrix}$$

E, conseqüentemente,

$$k(t) = \frac{2r'(t)^2 - r(t)r''(t) + r(t)^2}{(r'(t)^2 + r(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (**)$$

que é a fórmula para a curvatura de uma curva em *coordenadas polares*.

Tomando $b = 1$ na definição das Cassinianas, temos $r^4 - 2r^2 \cos 2t + 1 - a^4 = 0$

Derivando a expressão: $r^4 - 2r^2 \cos 2t = a^4 - 1$ obtemos:

$$4r^3 r' - 4r(\cos 2t)r' + 4r^2 \sin 2t = 0 \quad (A)$$

$$\text{De onde podemos tirar que } r' = -r \frac{\sin 2t}{r^2 - \cos 2t} \quad (B)$$

Derivando (A) encontramos a relação:

$$12r^2 r' r' + 4r^3 r'' - 4r'(\cos 2t)r' + 8r(\sin 2t)r' - 4r(\cos 2t)r'' + 8r(\sin 2t)r' + 8r^2 \cos 2t = 0$$

da qual é possível extrair

$$r'' = -\frac{3r^2(r')^2 - (r')^2 \cos 2t + 4r(\sin 2t)r' + 2r^2 \cos 2t}{r(r^2 - \cos 2t)} \quad (C)$$

Voltando à expressão da curvatura para curvas em coordenadas polares, notamos que o sinal desta função depende somente do numerador:

$$n(t) = 2r'(t)^2 - r(t)r''(t) + r(t)^2$$

Substituindo (B) e (C) em $n(t)$ e usando que $r^2 = \cos 2t + \sqrt{a^4 - \sin^2 2t}$, chegamos a:

$$n(t) = r^2 a^4 \frac{2 \cos 2t + \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}}{\left(\sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}\right)^3},$$

cujo sinal depende somente de $\tilde{n}(t) = 2 \cos 2t + \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}$ (4*)

Assim, $\tilde{n}(t) \geq 0$ se, e só se $2 \cos 2t + \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)} \geq 0$, isto é,

Mas, $\tilde{n}(t) = 0$ se $2 \cos 2t = -\sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}$

Elevando ao quadrado os dois membros da desigualdade anterior, obtemos:

$$0 \leq \cos^2 2t = \frac{a^4 - 1}{3} \leq 1$$

que determina $1 \leq a \leq \sqrt{2}$.

Conclusão, se $1 \leq a \leq \sqrt{2}$, $\tilde{n}(t) = 0$ e, conseqüentemente, $k_a(t)$ se anula e se $0 \leq a < 1$ ou $a > \sqrt{2}$, não ocorre anulamento da curvatura de $c_a(t)$ e, com isso, a $k_a(t)$ não muda de sinal. Como o não anulamento de $k_a(t)$ implica na convexidade de $c_a(t)$ para curvas simples, logo:

$c_a(t)$ é convexa para $0 < a < 1$ ou $a > \sqrt{2}$

No entanto, para encontrar a equação que fornece $\tilde{n}(t)$ usamos que

$$r^2 = \cos 2t + \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}$$

ao passo que também pode acontecer:

$$r^2 = \cos 2t - \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}$$

Mas, para esse caso,
$$n(t) = -a^4 \frac{2 \cos 2t - \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}}{\left(\sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}\right)^3} e$$

$$\tilde{n}(t) = 2 \cos 2t - \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}$$

Então, agora, a curvatura se anula se, e só se $2 \cos 2t = \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}$,

cujos anulamentos são os mesmos que os de (4*) e daí, podemos tirar que

$$c_a(t) \text{ é convexa para } 0 < a < 1$$

A alternância de sinal de $\tilde{n}(t)$ pode ser observada quando são traçados os gráficos para sucessivos a .

Observações:

(1) Como, para $a > 1$, tem-se que

$$\sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)} > \sqrt{\cos^2 2t} = |\cos 2t|.$$

Logo, $r^2 = \cos 2t - \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)} < \cos 2t - |\cos 2t| \leq 0$, isto é,

$r^2 < 0$, e isto é, sem dúvida, um *absurdo* !

Portanto, não há sentido em fazermos acersões para $r^2 = \cos 2t - \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}$ e $a > 1$.

(2) Ainda no caso em que $r^2 = \cos 2t + \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}$,

$a = \sqrt{2}$, $\cos^2 2t = 1$ que, para $0 \leq t \leq 2\pi$ tem duas soluções distintas e ocorrerá anulamento para $t_0 = 0$ e $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 3\frac{\pi}{2}$ e $t_4 = 2\pi$.

(3) De posse da expressão de $\tilde{n}(t)$, a função curvatura de c_a é:

$$k_a(t) = \frac{r^2 a^4 \frac{2 \cos 2t + \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}}{\left(\sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}\right)^3}}{\left(r^2 + \left(-r \frac{\sin 2t}{r^2 - \cos 2t}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \text{ para } r^2 = \cos 2t + \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}$$

$$k_a(t) = -\frac{r^2 a^4 \frac{2 \cos 2t + \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}}{\left(\sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}\right)^3}}{\left(r^2 + \left(-r \frac{\sin 2t}{r^2 - \cos 2t}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{para } r^2 = \cos 2t - \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)}$$

que sugere um certo grau de dificuldade no seu tratamento gráfico.

Para acabar de provar as propriedades de (1), falta mostrarmos que $k(t)$ tem dois máximos e dois mínimos locais.

Para descobrir tais pontos, considere (2 *), de onde podemos tirar que:

$$\frac{1}{k} = \frac{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2 - rr'' + r^2} \quad (5 *)$$

Derivando os dois membros de (5 *), obtem-se, por um lado, mais precisamente

$$\text{o esquerdo: } -\frac{1}{k^2} k' = \frac{d}{dt} \left[\frac{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2 - rr'' + r^2} \right]$$

Mas, os pontos de máximo e mínimo de k se dão quando $k' = 0$.

$$\text{Então, } \frac{d}{dt} \left[\frac{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2 - rr'' + r^2} \right] = 0 \quad \text{fornece a solução procurada. Mas, resolvendo}$$

a equação anterior em r' , tem-se como solução, $r' = \rho^2$ onde ρ é solução da equação $-a^4 + 1 - 2(\cos 2t)Z^2 + Z^4 = 0$ em Z . Porém, esta equação tem r como solução, pois esta define as Cassinianas. Ou seja, $\rho = r$.

E, com o auxílio do computador, acha-se as soluções $t_0 = 0$, $t_1 = \pm \frac{\pi}{2}$,

$$t_2 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{4} \sqrt{(40a^4 - 16a^8 - 9)}\right), t_3 = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{4} \sqrt{(40a^4 - 16a^8 - 9)}\right)$$

e $t_4 = \pi$, onde t_0, t_2, t_3 são válidos para $0 < a < 1$ e t_0 dá origem a dois pontos críticos, um para cada definição de $r(t)$.

Portanto, há quatro pontos de vértice nas Cassinianas para $0 < a < 1$.

Quando $a > 1$, os pontos de vértice são t_0, t_1 e t_4 valem para $r(t) =$

$$\cos 2t + \sqrt{(a^4 - 1 + \cos^2 2t)} \quad \text{e } a > 1.$$

Argumentação para (2)

Quando $a=1$, a curva é a *Lemniscata de Bernoulli*. cuja função curvatura é:

$$k(t) = \frac{3\sqrt[3]{2} \cos(t)}{(-3 + \cos(2t))^{\frac{3}{2}}} \text{ usando a parametrização:}$$

$$x(t) = \frac{\cos(t)}{1 + \sin(t)^2} \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{\sin(t) \cos(t)}{1 + \sin(t)^2}, \text{ pois a curvatura}$$

é invariante à parametrização.

Assim, a variação do sinal da curva é a mesma que do $\cos(t)$. Como $-\pi \leq t \leq \pi$, e, neste intervalo, o $\cos t$ se anula duas vezes, com um mínimo negativo e um máximo positivo.

Notemos que

$$(r^2 - 1)^2 < r^4 - 2r^2 \cos 2t + 1 < (r^2 + 1)^2$$

$$(r^2 - 1)^2 < a^4 < (r^2 + 1)^2$$

Para $a > \sqrt{2}$, $r > 1$ temos que as Cassinianas estão entre duas circunferências, pois:

$$r^2 - 1 < a^2 < r^2 + 1, \text{ ou ainda, } a^2 - 1 < r^2 < a^2 + 1$$

Passando ao limite na desigualdade anterior:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{r^2}{a^2} \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a^2}\right),$$

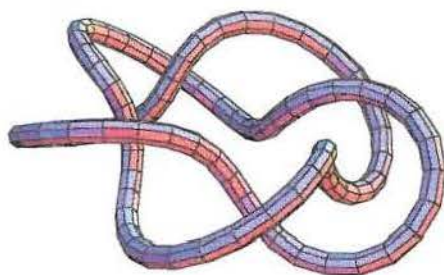
ou ainda, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{r^2}{a^2} = 1$. Ou seja, para valores muito grandes de a as Cassinianas se aproximam de uma circunferência de raio a .

No que diz respeito às cúspides na evoluta, estas resultam, imediatamente, do uso do teorema I, do capítulo II, após levar em consideração os anulamentos das funções curvaturas que mostramos.

CAPÍTULO III

CURVAS NO ESPAÇO:

CURVATURA, TORÇÃO E VÉRTICE



3.1 Introdução

Um dos objetivos deste capítulo é interpretar geometricamente a variação de sinal da torção para curvas no espaço relacionando com a possível ocorrência de cúspides em curvas associadas. Nossa sensibilização partirá desta análise para uma família de curvas fechadas no espaço muito rica (nós) (q, p) sobre o toro.

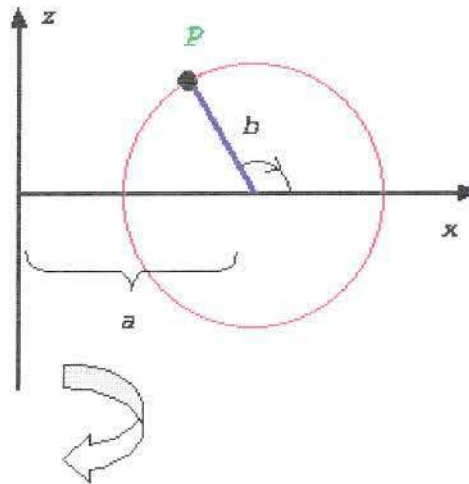


fig. 3.1

A descrição cinemática dessas curvas pode ser feita da seguinte maneira.

Imagine a trajetória descrita por uma partícula deslizando sobre uma circunferência do plano zx , de centro com distância fixa a até a origem do sistema de coordenadas cartesianas e raio $b < a$, como na *figura 3.1*, enquanto esta circunferência executa um movimento de rotação em torno do eixo z .

Se $b < a$, esta curva é uma espiral sobre o toro de raios a e b (*figura 3.2*).

Se $b \geq a$, nós obtemos uma curva com auto-intersecção sobre o Toro. Supondo constante iguais à w_1 e w_2 as velocidades angulares de rotação, nós podemos descrever a curva parametricamente por:

$$(x, y, z) = a(\cos w_1 t, \sin w_1 t, 0) + b(\cos w_2 t (\cos w_1 t, \sin w_1 t, 0) + \sin w_2 t (0, 0, 1))$$

Em termos coordenadas polares, esta família também é definida por

$$r = a + b \cos \frac{w_2}{w_1} \theta \text{ e } z = b \sin \frac{w_2}{w_1} \theta.$$

Se $\lambda = \frac{p}{q}$ é um irracional, então a curva é simples e não fechada e $\lambda = \frac{p}{q}$ é um racional

irredutível, a curva é simples e rotaciona q vezes ao redor do eixo x .

Se $b < a$, essa (q,p) -curva rotaciona p voltas em torno do toro no sentido meridional enquanto que, no sentido latitudinal, esta realiza q voltas. Ela é um *knot* se p e q são co-primos.

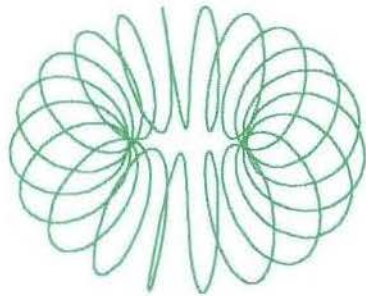


fig. 3.2

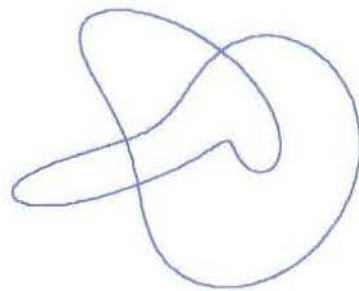


fig. 3.3

3.2- Relação entre Cúspides na Binormal e Mudança de Sinal da Torção de uma Curva no Espaço



fig 3.4



fig. 3.5

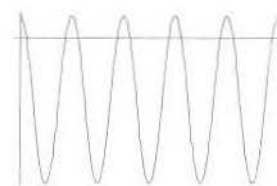


fig.3.6

Assim como existe uma co-relação entre os pontos de máximo e mínimo da *curvatura* de uma curva plana regular simples e as cúspides de sua evoluta, é válido indagar se há uma analogia desta propriedade para curvas no espaço. Como a curvatura de uma curva espacial nunca é negativa, a resposta para esta questão, num primeiro momento, pode ser obtida analisando-se a *torção* de curvas no espaço.

A curva na *figura 3.4* é definida por:

$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ onde

$$r(t) = 1.5 + \cos(5t);$$

$$x(t) = r(t) \cos(t);$$

$$y(t) = r(t) \sin(t);$$

$$z(t) = \sin(5t);$$

Que nada mais é que uma curva fechada sobre o *toro* que percorre cinco voltas no sentido meridional e uma no sentido latitudinal.

A curva da *figura 3.5* é exatamente a *indicatriz binormal* de α e a *figura 3.6* representa o gráfico da função *torção* de α .

Das três figuras, depois de uma observação mais atenta, nota-se que, em especial, a *figura 2* apresenta *dez cúspides*, enquanto que a terceira tem *dez pontos de mudança de sinal da torção*. Na realidade, o que aparece por trás deste fato pode ser constatado pelo seguinte:

3.2 Teorema I

Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular do espaço, parametrizada por comprimento de arco com curvatura nunca nula e $\beta : I \rightarrow S^2$ sua indicatriz binormal e $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ a torção.

Nestas condições, os pontos de cúspide de β correspondem a pontos de mudança de sinal de τ .

Demonstração:

Seja $a \in I$, um ponto de mudança de sinal de τ .

Suponhamos que τ muda do sinal negativo para o positivo numa vizinhança de a .

Para mostrar que a é um ponto de cúspide da binormal, é necessário provar que

$$\text{se } \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = v, \text{ então } \lim_{t \rightarrow a^-} \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = -v$$

Pelas fórmulas de Frenet, $\beta' = -\tau n$, onde n é o vetor normal unitário de α .

Então, $\beta'(a) = 0$ e

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} &= \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{-\tau(s)n(s)}{|-\tau(s)n(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{-\tau(s)n(s)}{|\tau(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{-\tau(s)n(s)}{-\tau(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow a^+} n(s) = v, \end{aligned} \quad (1)$$

pois τ é negativa numa vizinhança à esquerda de a .

Por outro lado, pelo fato de τ ser positiva numa vizinhança à direita de a ,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} &= \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{-\tau(s)n(s)}{|-\tau(s)n(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{-\tau(s)n(s)}{|\tau(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{-\tau(s)n(s)}{\tau(s)} = \\ &= -\lim_{s \rightarrow a^-} n(s) = -v \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) e (2) conclui-se que

$$\text{se } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} = v, \text{ então } \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} = -v.$$

Logo, se τ muda do sinal negativo para o positivo numa vizinhança de a é um ponto de

cúspide da binormal.

Se τ muda do sinal positivo para o negativo numa vizinhança de a o raciocínio é o mesmo.

Para mostrar a recíproca, suponha que a é ponto de cúspide de β .

Então, por definição de cúspide, vale se $\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|}$ e

$$\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} = 0. \quad (*)$$

Usando novamente as fórmulas de Frenet, $\beta' = -\tau n$, onde n é o vetor normal unitário de α , e segue que se τ não muda de sinal em a , τ mantém o mesmo sinal numa vizinhança de a .

Suponhamos que este seja positivo. Neste caso,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{-\tau(s)n(s)}{|-\tau(s)n(s)|} &= \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{-\tau(s)n(s)}{|\tau(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{-\tau(s)n(s)}{\tau(s)} = \\ &= -\lim_{s \rightarrow a^+} n(s) = v_1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{-\tau(s)n(s)}{|-\tau(s)n(s)|} &= \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{-\tau(s)n(s)}{|\tau(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{-\tau(s)n(s)}{\tau(s)} = \\ &= -\lim_{s \rightarrow a^-} n(s) = v_2 \quad (4) \end{aligned}$$

E assim, $\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{-\tau(s)n(s)}{|-\tau(s)n(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{-\tau(s)n(s)}{|-\tau(s)n(s)|}$ contrariando (*).

Portanto, τ tem que mudar de sinal em a .

O raciocínio é o mesmo supondo que τ mantém sinal negativo numa vizinhança de a . ■

Para as curvas sobre o toro, podem ser tiradas mais conclusões utilizando o teorema precedente e o que vem a seguir, mostrado em [Costa, S.I.R.] em 1985.

3.2.1 Teorema II

Seja α uma curva (q, p) sobre o toro com raio maior $a > 1$ e τ a função torção desta.

τ não se anula se, e somente se, $\frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1} < a < n^2 + 1$, onde $n = \frac{p}{q}$.

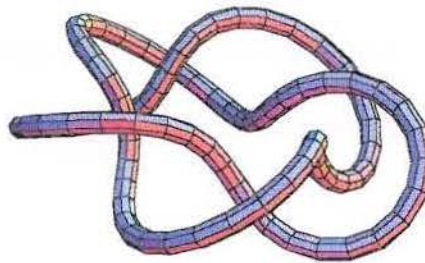


fig. 3.7 Curva (2,5) sobre o Toro



fig. 3.8 Função curvatura para $a = 1, 5$, e 10 . (da esquerda para a direita)

Os gráficos acima ilustram o teorema anterior. O primeiro traço é da curva (5,2) sobre o Toro e os três subseqüentes referem-se a torção (5,2) para diferentes valores de a . No primeiro, $a=1$, no segundo, $a=5$ e no terceiro, $a=10$. Como previsto pelo teorema, o primeiro e o último não apresentam anulamento da torção, pois os valores de a extrapolam a desigualdade dada. Por outro lado, ocorre o anulamento por que a obedece a desigualdade.

Com esses dois últimos teoremas, é certo que a curva binormal de uma curva sobre o toro não apresenta cúspides se $\frac{2n^2+1}{n^2-1} < a < n^2+1$ e $a > 1$, uma vez que, pelo Teorema II, a torção desta curva não se anula para a nestas condições e, usando agora o Teorema I, tem-se que não há cúspides na binormal de α .

3.3 A Correspondência de Vértices de Curvas do Plano do Espaço

A versão do Teorema dos Quatro Vértices para curvas na esfera apareceu, pela primeira vez, sem demonstração para o caso plano em [Kneiser]. Não encontramos, entretanto, sua demonstração na literatura.

Teorema III

Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, curva regular parametrizada por comprimento de arco e $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 1)\}$ a projeção estereográfica do plano na superfície esférica de raio unitário e centro na origem.

Sejam $\pi = \sigma(\alpha) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2$ a projeção estereográfica de α .

Então, os vértices de α correspondem aos vértices de π .

Os cinco resultados, enunciados a seguir, formam, de maneira fundamental, a demonstração deste teorema.

Lema 1 *$a \in I$ é ponto de vértice de α , se, e somente se, o círculo osculador de α permanece, localmente, do mesmo lado de α .*

Lema 2 *C é círculo em \mathbb{R}^2 se, e somente se $\sigma(C)$ é círculo em S^2 .*

Lema 3 *Se $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é círculo osculador de α num ponto $a \in I$, então $\sigma(\tilde{\alpha}(I)) = \tilde{\pi}$ é círculo osculador de π em $\sigma(\alpha(a)) \in \mathbb{R}^2$.*

Lema 4 *Localmente, $\pi = \sigma(\alpha)$ fica do mesmo lado do seu plano osculador, \mathcal{O} , no ponto $\pi(a)$, se a é vértice de α .*

Lema 5 *Se π fica do mesmo lado do do plano osculador, \mathcal{O} , então, a torção de π muda de sinal.*

Demonstração do Lema 1 :

A demonstração do Lema 1 fizemos no Teorema 1, do capítulo 1. Mais precisamente, na equivalência $(1) \Leftrightarrow (4)$.

Demonstração do Lema 2 :

Seja \mathcal{C} um círculo no plano. Então \mathcal{C} pode ser descrito da seguinte forma :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \text{ onde } A, B, C \in \mathbb{R}\}$$

Da expressão da anti-projeção estereográfica, $x = \frac{X}{1-Z}$, $y = \frac{Y}{1-Z}$, onde $(X, Y, Z) \in S^2$.

Então,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = \left(\frac{X}{1-Z}\right)^2 + \left(\frac{Y}{1-Z}\right)^2 + A\left(\frac{X}{1-Z}\right) + B\left(\frac{Y}{1-Z}\right) + C = 0. \quad (1)$$

Mas, $(X, Y, Z) \in S^2$, e, com isso, $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, ou seja,

$$X^2 + Y^2 = 1 - Z^2 = (1 - Z)(1 + Z) \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos :

$$\begin{aligned} \frac{(1 - Z)(1 + Z)}{(1 - Z)^2} + \frac{AX + BY + C(1 - Z)}{1 - Z} &= \frac{1 + Z + AX + BY - CZ + C}{1 - Z} = \\ &= \frac{AX + BY + DZ + E}{1 - Z} = 0 \end{aligned}$$

Fazendo $D = 1 - C$, $E = 1 + C$, temos que $AX + BY + DZ + E = 0$, que representa um plano no \mathbb{R}^3 .

Como $\sigma(I) \subset S^2$, então $\sigma(I)$ é fruto da intersecção de um plano com uma superfície esférica.

Isso nos permite concluir que $\sigma(I)$ é uma circunferência, como desejamos provar.

Agora, suponhamos que \mathcal{C} é uma circunferência na S^2 .

Então, \mathcal{C} pode ser visto como a intersecção de um plano com S^2 , ou seja,

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / Ax + By + Cz + D = 0, \text{ onde } A, B, C, D \in \mathbb{R}\} \cap S^2. \quad (3)$$

Pela expressão da projeção estereográfica, se $(X, Y, 0) \in \mathbb{R}^2 \cap \sigma^{-1}(\mathcal{C})$, então,

$$\sigma(X, Y, 0) = \frac{2}{X^2 + Y^2 + 1} \left(X, Y, \frac{X^2 + Y^2 - 1}{2} \right) = (x, y, z) \quad , X, Y, Z \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Substituindo (4) na equação do plano em (3), obtemos:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= \frac{2}{X^2 + Y^2 + 1} (AX + BY + C \left(\frac{X^2 + Y^2 - 1}{2} \right)) + D = \\ \frac{2}{X^2 + Y^2 + 1} \left(\frac{CX^2 + CY^2 - C}{2} + AX + BY + D(X^2 + Y^2 + 1) \right) &= \\ \frac{2}{X^2 + Y^2 + 1} (X^2(D + \frac{C}{2}) + Y^2(D + \frac{C}{2}) + AX + BY + D - \frac{C}{2}) &= 0, \text{ com } A, B, C, D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ou seja, os pontos do plano que constituem a pré-imagem da circunferência C de S^2 satisfazem uma equação que descreve uma circunferência no plano. Logo, $\sigma^{-1}(C)$ também é circunferência.

E assim concluímos que, tanto a projeção estereográfica quanto sua inversa, levam círculos em círculos.

Demonstração do Lema 3 :

Para ajudar a demonstrar o Lema 3 será necessária a seguinte

Teorema *: *Se α é curva plana e $\pi = \sigma(\alpha)$ é a anti-projeção estereográfica*

de α , então σ aumenta arcos de π na razão maior que a de 1 para

$$1 + x^2 + y^2, \text{ para cada } s \in I.$$

Demonstração:

Suponha $|\alpha'| = 1$

Afirmação: $|\pi'| = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} |\alpha'|$

Prova da *Afirmação*.

Sabendo que $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, então, da expressão da projeção estereográfica

$$\pi(s) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1) \in S^2$$

Logo, $\pi'(s) = g_1(s)g_2(s)$, onde $g_1(s) = \frac{2}{1 + x(s)^2 + y(s)^2}$ e

$$g_2(s) = \left(\frac{-(x(s)x'(s) + y(s)y'(s))}{1 + x(s)^2 + y(s)^2} (2x(s), 2y(s), x(s)^2 + y(s)^2 - 1)(x'(s), y'(s), x(s)x'(s) + y(s)y'(s)) \right)$$

e assim, $|\pi'(s)|^2 = \pi'(s) \cdot \pi'(s) = \frac{4}{(1+x(s)^2+y(s)^2)^2} |\alpha'(s)|^2$, isto é,
 $|\pi'(s)| = \frac{2}{1+x(s)^2+y(s)^2} |\alpha'(s)|$, como havíamos afirmado.

Diretamente da *Afirmção*, se $a, b \in I$, $a < b$, então

$$\int_a^b |\pi'(s)| ds = \int_a^b \frac{2}{1+x(s)^2+y(s)^2} |\alpha'(s)| ds \leq 2 \int_a^b |\alpha'(s)| ds, \quad \text{pois}$$

$$\frac{2}{1+x(s)^2+y(s)^2} \leq 2$$

Denotando $l_\alpha(a, b) = \int_a^b |\alpha'(s)| ds$ e $l_\pi(a, b) = \int_a^b |\pi'(s)| ds$, a desigualdade acima é dada

por
 $l_\pi(a, b) \leq 2 l_\alpha(a, b).$

Geometricamente, isso significa que a metade do comprimento do arco da curva α que é imagem de $[a, b]$ é menor ou igual ao comprimento do arco da curva π que é imagem do mesmo intervalo.

Portanto, vale a proposição e, com isso, efetuaremos a demonstração do teorema seguindo o seguinte raciocínio.

Lema 3 Sejam $\alpha, \tilde{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, curvas planas regulares,

$$\tilde{\pi} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 \text{ tais que } \alpha(a) = \tilde{\alpha}(a), \pi(a) = \tilde{\pi}(a),$$

$$\pi = \sigma(\alpha) \text{ e } \tilde{\pi} = \sigma(\tilde{\alpha}) \text{ para } a \in I. \text{ Se } \tilde{\alpha} \text{ é o círculo osculador de } \alpha \text{ em } a,$$

$$\text{então } \tilde{\pi} \text{ é o círculo osculador de } \pi \text{ em } \sigma(\alpha(a)).$$

Demonstração:

$$\text{Sejam} \quad Q_0 = \alpha(a) = \tilde{\alpha}(a), \quad Q = \alpha(a + \lambda') = \tilde{\alpha}(a + \lambda) \quad \text{e}$$

$$P_0 = \pi(a) = \tilde{\pi}(a) = \sigma(\alpha(a)) = \sigma(\tilde{\alpha}(a)), P = \pi(a + h), P' = \tilde{\pi}(a + h) \text{ para } a \in I, h > 0.$$

Por hipótese, $\tilde{\alpha}$ é o círculo osculador de α em a , então o contato entre $\tilde{\alpha}$ e α é de ordem maior

$$\text{ou igual a dois, isto é, } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|QQ'|}{\lambda^2} = 0$$

Como, pelo Lema 2, a projeção estereográfica e sua inversa leva círculo em círculo, a tese consiste em mostrar que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|PP'|}{h^2} = 0$.

Como o comprimento do segmento PP' é inferior à medida de qualquer arco de circunferência na S^2 com extremidades em P e P' ; em particular, é inferior a medida do arco de extremos P e P' que constitui a imagem, por σ , do segmento QQ' do IR^2 .

Logo, $|PP'| \leq |QQ'|$, implicando que $\frac{|PP'|}{\lambda^2} \leq \frac{|QQ'|}{\lambda^2}$ para $\lambda \in IR$.

Assim, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|PP'|}{\lambda^2} \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|QQ'|}{\lambda^2} = 0$

Por outro lado,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|PP'|}{\lambda^2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|PP'|}{\lambda^2} \frac{h^2}{h^2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|PP'|}{h^2} \frac{h^2}{\lambda^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|PP'|}{h^2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h^2}{\lambda^2}$$

Caso $\frac{h^2}{\lambda^2}$ for limitada e $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h^2}{\lambda^2} \neq 0$, então ocorrerá

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|PP'|}{h^2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h^2}{\lambda^2} \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|QQ'|}{\lambda^2} = 0.$$

Conseqüentemente, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|PP'|}{h^2} = 0$, como desejamos.

Mas, de fato, $\frac{h^2}{\lambda^2}$ é limitada e $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h^2}{\lambda^2} \neq 0$ o que provaremos a seguir.

Seja γ circunferência do plano de centro c e raio r . Se $\gamma(s) \in \gamma$, então

$$(*) |\gamma(s) - c| = r \Leftrightarrow |\gamma(s)| - |c| \leq r \leq |\gamma(s)| + |c| \Leftrightarrow |\gamma(s)| \leq |c| + r \text{ ou } |\gamma(s)| \geq |c| - r \geq 0$$

Tome $\gamma = \tilde{\alpha}$, $c = \alpha(a) + \frac{1}{K(a)}n(a)$ e $r = \frac{1}{K(a)}$ e considere a desigualdade da esquerda.

$$\text{Assim, } |\tilde{\alpha}| \leq \left| \alpha(a) + \frac{1}{K(a)}n(a) \right| + \frac{1}{K(a)}, \text{ e daí, } |\tilde{\alpha}(s)|^2 + 1 \leq \left| \alpha(a) + \frac{1}{K(a)}n(a) \right|^2 + \frac{1}{K(a)} + 1$$

Em virtude de nenhum dos membros da desigualdade ser nulo pode-se tomar os inversos:

$$\frac{1}{|\tilde{\alpha}(s)|^2 + 1} \geq \frac{1}{\left| \alpha(a) + \frac{1}{K(a)}n(a) \right|^2 + \frac{1}{K(a)} + 1} = \mu \text{ (constante)} \quad (1)$$

Integrando (1), temos $\int_a^{a+k} |\tilde{\alpha}'(s)| ds = \int_{\sigma(a)}^{\sigma(a+k)} 2 \frac{|\tilde{\beta}'(s)|}{|\tilde{\alpha}(s)|^2 + 1} ds \geq 2\mu \int_{\sigma(a)}^{\sigma(a+k)} |\tilde{\beta}'(s)| ds$ (2)

Como $\tilde{\alpha}$ é parametrizada por comprimento de arco, $\int_a^{a+k} |\tilde{\alpha}'(s)| ds = k$, e voltando a (2) :

$$k \geq 2\mu \int_{\sigma(a)}^{\sigma(a+k)} |\tilde{\beta}'(s)| ds = 2\mu h, \text{ onde } h \text{ é o comprimento de arco } \beta \text{ de } a \text{ até } a+h.$$

Ajeitando a desigualdade anterior, $\frac{h}{k} \leq \frac{1}{2\mu}$, onde r é constante positiva.

Ou seja, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{k} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} < +\infty$, ou seja, $\frac{h}{k}$ é limitada numa vizinhança de 0.

Usando o lado direito da desigualdade (*), temos:

$$|\tilde{\alpha}| \geq \left| \alpha(a) + \frac{1}{K(a)} n(a) \right| - \frac{1}{K(a)} = \mu, \text{ acarretando:}$$

$$|\tilde{\alpha}(s)|^2 + 1 \geq \left| \alpha(a) + \frac{1}{K(a)} n(a) \right|^2 - \frac{1}{K(a)} + 1$$

É fato que nenhum dos membros da desigualdade acima é zero, logo, podemos tomar os inversos:

$$\frac{1}{|\tilde{\alpha}(s)|^2 + 1} \leq \frac{1}{\left| \alpha(a) + \frac{1}{K(a)} n(a) \right|^2 - \frac{1}{K(a)} + 1} = \mu \text{ com } \mu \text{ finito, pois,}$$

$$\left| \alpha(a) + \frac{1}{K(a)} n(a) \right|^2 - \frac{1}{K(a)} + 1 \neq 0$$

Integrando a desigualdade:

$$l = \int_a^{a+k} |\tilde{\alpha}'(s)| ds = \int_{\sigma(a)}^{\sigma(a+k)} 2 \frac{|\tilde{\beta}'(s)|}{|\tilde{\alpha}(s)|^2 + 1} ds \leq 2\mu \int_{\sigma(a)}^{\sigma(a+k)} |\tilde{\beta}'(s)| ds = 2\mu h.$$

Logo, $\frac{h}{k} \geq \frac{1}{2\mu}$ constante não nula.

Portanto, vale mesmo que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{k^2} \neq 0$.

Lema 4 *Localmente, $\pi = \sigma(\alpha)$ fica do mesmo lado do seu plano osculador, \mathcal{O} , no ponto $\pi(\alpha)$, se a é vértice de α*

Demonstração do Lema 4 :

Considere o seguinte Teorema

Teorema V *Se D é disco em \mathbb{R}^2 , então, $\sigma(D)$ é calota em S^2 .*

De fato.

Um disco genérico de S^2 é descrito por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + Ax + By + C \leq 0, \text{ onde } A, B, C \in \mathbb{R}\} \text{ ou}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + Ax + By + C \geq 0, \text{ onde } A, B, C \in \mathbb{R}\}$$

Considere $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + Ax + By + C \leq 0, \text{ onde } A, B, C \in \mathbb{R}\}$

e, para $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + Ax + By + C \geq 0, \text{ onde } A, B, C \in \mathbb{R}\}$

a demonstração é análoga

Mas, diretamente da expressão da anti-projeção estereográfica, $x = \frac{X}{1-Z}$, $y = \frac{Y}{1-Z}$

$$\begin{aligned} \text{Então, } x^2 + y^2 + Ax + By + C &= A\left(\frac{X}{1-Z}\right) + B\left(\frac{Y}{1-Z}\right) + C = \\ &= \frac{X^2 + Y^2}{(1-Z)^2} + \frac{AX + BY + C(1-Z)}{(1-Z)} \leq 0 \end{aligned}$$

Lembrando que $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, a expressão anterior se transforma em:

$$\begin{aligned} \frac{(1-Z)(1+Z)}{(1-Z)^2} + \frac{AX + BY + C(1-Z)}{(1-Z)} &= \frac{(1+Z)}{1-Z} + \frac{AX + BY + C(1-Z)}{1-Z} = \\ &= \frac{AX + BY + (1-C)Z + (C+1)}{(1-Z)} \leq 0 \end{aligned}$$

Como $Z \in [-1, 1]$, $1-Z > 0$, é verdade que $AX + BY + (1-C)Z + (C+1) \leq 0$

Assim, podemos concluir que

$$\sigma(D) = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } AX + BY + (1-C)Z + (C+1) \leq 0, \text{ onde}$$

$$A, B, C \in \mathbb{R}\} \cap S^2$$

Ou seja, $\sigma(D)$ é intersecção de um semi-espaco determinado pelo plano

$AX + BY + (1-C)Z + (C+1) = 0$ com S^2 , que é justamente um disco.

Portanto, vale o teorema.

Para ver que $\pi = \sigma(\alpha)$ não atravessa o plano osculador numa vizinhança, W , de $\sigma(\alpha(a))$, suponha que atravessasse.

Então, π tem pontos nos dois semi-espacos definidos pelo plano osculador \mathcal{O} , ou seja, π tem pontos nas duas calotas de S^2 determinadas por \mathcal{O} . Logo, se a equação de \mathcal{O} é $Ax + By + Cz + D = 0$, existe $(m, n, p) \in \pi(W)$, tal que $Am + Bn + Cp + D > 0$ e existe $(\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{p}) \in \pi(W)$, tal que $A\tilde{m} + B\tilde{n} + C\tilde{p} + D < 0$. Segue do teorema anterior que $\sigma^{-1}(m, n, p)$ pertence ao disco delimitado por \mathcal{O} e $\sigma^{-1}(\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{p})$ pertence à região externa a \mathcal{O} .

Conclusão: Existe um arco de α com extremidades em $\sigma^{-1}(m, n, p)$ e $\sigma^{-1}(\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{p})$ que atravessa o círculo osculador de α em a que é um ponto de vértice de α . Isso contraria o Lema 1.

Portanto, vale o Lema 4.

Lema 5 $\pi = \sigma(\alpha)$ ficado mesmo lado do do plano osculador, \mathcal{O} , num ponto $\pi(\alpha(a))$, se, e só se, a torção de π muda de sinal em a .

Demonstração do Lema 5 :

Pelo Lema 4, π não atravessa o plano osculador, e, da representação canônica de π temos que a componente binormal de π é dada por

$$\frac{\tau(\sigma(\alpha(a)))K(\sigma(\alpha(a)))}{6}(s - \sigma(\alpha(a)))^3 + R(s), \text{ onde } \tau \text{ é a torção de } \pi, \text{ e } K \text{ é a função}$$

curvatura de α .

Mas, se π não atravessa \mathcal{O} , então o sinal da componente binormal não se altera, e, como o sinal de $(s - \sigma(\alpha(a)))^3$ se altera numa vizinhança de a e $K(\sigma(\alpha(a))) > 0$, τ tem que mudar de sinal numa vizinhança de a .

Se π atravessa \mathcal{O} , então o sinal da componente binormal se altera. Por isso, o sinal de τ não muda numa vizinhança de a .

Portanto, τ muda de sinal numa vizinhança de a , se, e somente se $\pi(\alpha)$ atravessa \mathcal{O} .

E acabamos de provar que:

Se a é vértice de α em a , então a também é vértice de $\pi = \sigma(\alpha)$

Por outro lado, se τ muda de sinal em a , então, pelo Lema 5, π não atravessa o plano \mathcal{O} em

$\pi(a)$ e, pelo *Lema 4*, \tilde{a} fica do mesmo lado de α numa vizinhança de a . Usando agora o *Lema 1*, a é ponto de máximo ou mínimo da função curvatura de α . Logo, a derivada da função curvatura de α muda de sinal em a , isto é, α tem um vértice em a . Com isso, provamos que: Se a é vértice de $\pi = \sigma(\alpha)$ em a , então a também é vértice de α .

Segue, com a validade dos *Lemas* de 1 a 5, que:

Os vértices de α correspondem aos vértices de π .

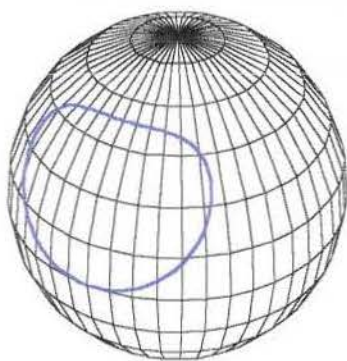


fig. 3.9

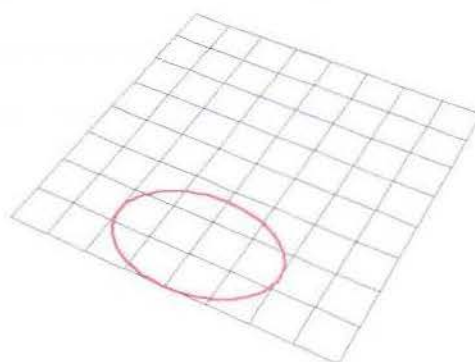


fig.3.10

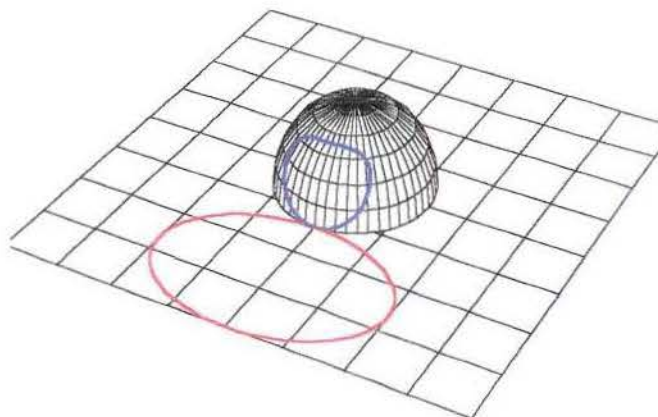


fig.3.11

A *figura 3.9* é o traço da projeção estereográfica da elipse parametrizada por:

$c(t) = (1.5 \cos t, 1 + \sin t, 0)$ que aparece na *figura 3.10*

A derivada da curvatura de c tem como numerador a função:
$$\frac{-2.8125 \sin 2t}{(1,625 - 0.625 \cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

Portanto, a curva c tem quatro vértices no intervalo $[0, 2\pi]$

Usando o teorema podemos concluir que a curva na superfície esférica dada na *figura 3.11* também tem quatro vértices.

Corolário: *Uma curva fechada simples na esfera tem, pelo menos quatro vértices.*

O teorema dos quatro vértices para uma curva no espaço foi recentemente provado para curvas convexas (que estão contidas no bordo de seu fecho [12] e [4]).

3.4 Análise das Funções Curvatura e Torção para uma Curva (q, p) sobre o toro.

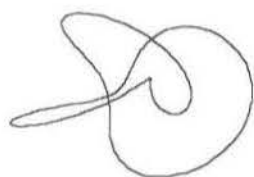


fig.3.12.a Curva $(2,3)$ para $a = \frac{3}{2}$

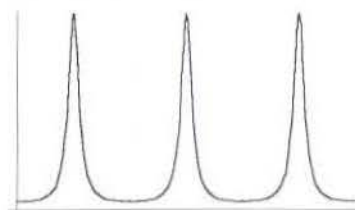


fig.3.12.b Curvatura



fig.3.13.a Curva $(2,3)$ para $a = \frac{13}{4}$

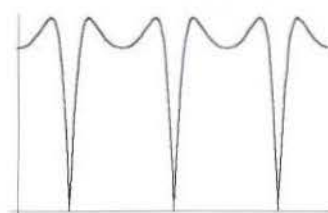


fig.3.13.b Curvatura

A *figura 3.12.a* é a curva sobre o toro $(2,3)$ com $a = \frac{3}{2}$ e a *figura 3.12.b* é a função curvatura desta.

A curva na *figura 3.13.a* é a mesma curva sobre o toro $(2,3)$ só que agora $a = \frac{13}{4}$ e a *figura 3.13.b* mostra a da função curvatura desta.

Notamos, com clareza, que a diferença entre os gráficos das funções curvaturas é que o

primeiro não se anula enquanto que o segundo tem três anulamentos ,e, entre as curvas (2,3), o que varia é o valor de a .

Então, de imediato, surge a questão:

Qual a relação entre os valores de a e os anulamentos da função curvatura deste tipo de curva sobre o toro , se existir de fato tal relação?

É a resposta para esta pergunta que apresentaremos nos parágrafos a seguir.

Sejam $a > 1$ e $n = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$, q não nulo.

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde

$$x(t) = r(t) \cos(t),$$

$$y(t) = r(t) \sin(t),$$

$$z(t) = \sin(nt),$$

$$r = r(t) = a + \cos(nt)$$

Teorema VI

Com as condições acima, a função curvatura de α , não se anula para $a \neq n^2 + 1$ e, para $a = n^2 + 1$, ela tem exatamente p anulamentos.

Demonstração:

Considere o triedro móvel $\tau = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que

$$v_1 = (\cos(t), \sin(t), 0);$$

$$v_2 = (-\sin(t), \cos(t), 0);$$

$$v_3 = (0, 0, 1).$$

Assim, descrevendo α em relação a este triedro, temos

$$\alpha = rv_1 + 0v_2 + \sin(nt)v_3 \tag{I}$$

Usando que $v_1' = v_2$, $v_2' = -v_1$ e $v_3' = 0$, ao derivar (I) obtemos:

$$\alpha' = r'v_1 + rv_2 + n\cos(nt)v_3 \text{ e } \alpha'' = (r'' - r)v_1 + 2r'v_2 + (-n^2\sin(nt))v_3$$

Dai, a expressão para a curvatura de α é

$$k(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^{\frac{3}{2}}} = 0, \text{ se, e só se, } |\alpha' \wedge \alpha''| = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{mas, } |\alpha' \wedge \alpha''| &= (-rn^2 \sin(nt) - 2r'n \cos(nt))v_1 + \\ &((r'' - r)n \cos(nt) + n^2 r' \sin(nt))v_2 + \\ &(2(r')^2 - r(r'' - r))v_3, \text{ então,} \end{aligned}$$

$$k(t) = 0 \text{ se, e somente se, } \begin{cases} -rn^2 \sin(nt) - 2r'n \cos(nt) = 0 & (I) \\ (r'' - r)n \cos(nt) + n^2 r' \sin(nt) = 0 & (II) \\ 2(r')^2 - r(r'' - r) = 0 & (III) \end{cases},$$

Na equação (I), usando que $r' = -n \sin(nt)$, obtemos:

$$\sin(nt)(-rn + 2n \cos(nt)) = 0, \text{ ou seja, deve ocorrer:}$$

$$-rn + 2n \cos(nt) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(nt) = 0.$$

Analisando a primeira possibilidade: $-rn + 2n \cos(nt) = 0$

Caso $\sin(nt) \neq 0$, então, necessariamente, para que (I) tenha validade $r = 2 \cos(nt)$

E também, $r = a + \cos(nt)$, logo, $a + \cos(nt) = 2 \cos(nt)$, ou equivalentemente,

$a = \cos(nt)$, isto é, $-1 \leq a \leq 1$. Porém, esta informação contradiz a hipótese de que $a > 1$.

Então, esta primeira possibilidade *não* é viável.

Analisando segunda possibilidade: $\sin(nt) = 0$

Se $\sin(nt) = 0$, então $\cos(nt) = -1$ ou $\cos(nt) = 1$

Caso-1) $\sin(nt) = 0$ e $\cos(nt) = 1$

Sob estas condições, tem-se que $r' = 0$, $r'' = -n^2$ e $r = a + 1$ (IV)

Substituindo-se os dados de (IV) na equação (II), concluímos que $a = -(n^2 + 1)$,

que é um absurdo, pois $a > 1$.

Caso-2) $\sin(nt) = 0$ e $\cos(nt) = -1$

Assim, $r' = 0$, $r'' = n^2$ e $r = a - 1$

Introduzindo estes dados no sistema anterior, conclui-se que as equações (I) e (III) são sempre satisfeitas e, para a validade da equação (II), é preciso que $a = n^2 + 1$, o que é perfeitamente possível uma vez que $a > 1$.

Logo, desta segunda análise, conclui-se que, se $\sin(nt) = 0$ e $\cos(nt) = -1$ e $a = n^2 + 1$ o sistema tem solução e, conseqüentemente, $k(t) = 0$.

Como $n = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ e $t \in [0, 2\pi]$, $\sin(nt) = 0$ e $\cos(nt) = -1$, se, e só se, $t = \frac{q}{p}(2\lambda + 1)\pi$, com λ inteiro.

Considerando-se que $0 \leq t \leq 2q\pi$, isto é, $0 \leq \frac{q}{p}(2\lambda + 1)\pi \leq 2q\pi$.

Simplificando, $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq p - \frac{1}{2}$, e, pelo fato de λ ser inteiro, tem-se que $\lambda = 0, 1, \dots, p - 1$ satisfaz a condição.

Portanto, $k(t)$ tem p anulamentos em $[0, 2q\pi]$.

Anulamento da Curvatura da Projeção

Assim como existe uma grande ligação entre os valores de a nas curvas sobre o toro e os anulamentos de sua função curvatura, é de se desconfiar que também exista uma estreita relação entre este mesmo a e os anulamentos da curvatura para a curva projeção, como sugerem as *figuras* 3.14. e 3.15

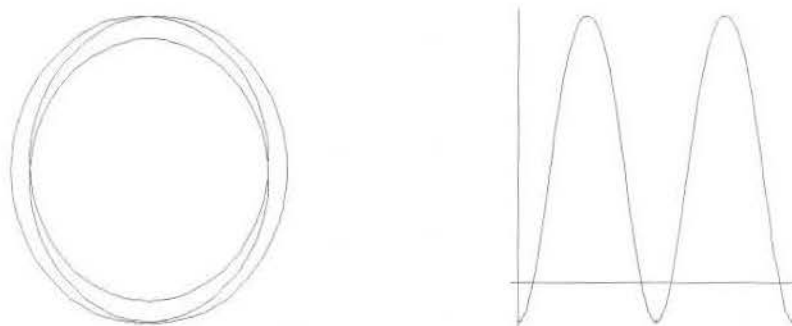


fig 3.14 Curva projeção de $(2,3)$ para $a=10$ e a curvatura desta



fig 3.14 curva projeção de $(3,2)$ para $a=1.5$ e sua curvatura desta

Faremos, a seguir, uma discussão a fim de tentar extrair algumas informações desta relação entre os valores de a e a curvatura da projeção de uma curva sobre o toro.

A projeção de α no plano xy é expressa por:

$p_a : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $p_a(t) = (x(t), y(t))$, onde

$$x(t) = r(t) \cos(t),$$

$$y(t) = r(t) \sin(t),$$

$$r = r(t) = a + \cos(nt)$$

A curvatura de p_a se anula se, e somente se, $\det \begin{bmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{bmatrix} = 0$.

$$\text{Mas, } \det \begin{bmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{bmatrix} = 2a^2 + 4n^2 + \cos(nt)(4a + 2an^2) + \cos^2(nt)(2 - 2n^2)$$

Fazendo $\cos(nt) = y$, tem-se que p_a se anula se, e somente se,

$$2a^2 + 4n^2 + y(4a + 2an^2) + y^2(2 - 2n^2) = 0 \quad (*)$$

Levando em conta que a equação em $(*)$ é quadrática, o anulamento da mesma ocorre se, e só se, $\delta = (4a + 2an^2)^2 - 4(2 - 2n^2)(2a^2 + 4n^2) \geq 0$.

É dado que $a > 1$, logo, $\delta > (4 + 2n^2)^2 - 4(2 - 2n^2)(2 + 4n^2) = 36n^4 > 0$ e,

como consequência, $(*)$ tem duas raízes reais distintas (desde que $n \neq 1$)

$$y_1 = \frac{-a(4 + 2n^2) + \sqrt{a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8}}{4(1 - n^2)} \text{ e}$$

$$y_2 = \frac{-a(4 + 2n^2) - \sqrt{a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8}}{4(1 - n^2)}$$

Porém, $y_1 = \cos(nt)$ e , com esse detalhe, *para que haja anulamento*, devemos ter

$$-1 \leq y_1 \leq 1, \text{ isto é, } -1 \leq \frac{-a(4 + 2n^2) + \sqrt{a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8}}{4(1 - n^2)} \leq 1,$$

$$\text{que é equivalente a } -\frac{4(1 - n^2)}{(4 + 2n^2)} \leq -a + \frac{\sqrt{a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8}}{(4 + 2n^2)} \leq \frac{4(1 - n^2)}{(4 + 2n^2)}. \quad (A)$$

Usando o mesmo raciocínio para $y_1 = \cos(nt)$, obtemos:

$$-\frac{4(1 - n^2)}{(4 + 2n^2)} \leq -a - \frac{\sqrt{a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8}}{(4 + 2n^2)} \leq \frac{4(1 - n^2)}{(4 + 2n^2)} \quad (B)$$

Agora, somando (A) , com (B) tem-se a seguinte relação entre a e n :

$$-\frac{4(1 - n^2)}{(4 + 2n^2)} \leq a \leq \frac{4(1 - n^2)}{(4 + 2n^2)} \quad (C)$$

No entanto, $a > 1$, e, por isso, é preciso fazer a seguinte distinção.

Se $0 < n < 2$, segue que $-\frac{4(1-n^2)}{(4+2n^2)} < 1$. Então,

se $0 < n < 1$, a relação (C) pode ser ajustada para: $1 \leq a \leq \frac{4(1-n^2)}{(4+2n^2)}$

E se $n > 2$, $-\frac{4(1-n^2)}{(4+2n^2)} > 1$ e vale $-\frac{4(1-n^2)}{(4+2n^2)} \leq a \leq \frac{4(1-n^2)}{(4+2n^2)}$.

Note que se $-\frac{4(1-n^2)}{(4+2n^2)} > a$ ou $a > \frac{4(1-n^2)}{(4+2n^2)}$ não há anulamento da curvatura,

conclusão direta de (C).

Consideremos, agora, a seguinte *Afirmção*:

Se γ é curva no espaço e p_γ é sua projeção em algum plano coordenado, então os pontos de anulamento da curvatura de γ são também pontos de anulamento da curvatura de suas projeções. E se as curvaturas das projeções se anulam simultaneamente, a curvatura da curva no espaço também se anula.

Com essa afirmação provada, é inquestionável que, tomando-se $\gamma = \alpha$, a projeção de α tem p anulamentos da curvatura, no mínimo, pois já mostramos que a curvatura de α tem exatos p anulamentos para $a = n^2 + 1$.

Prova da Afirmção:

Se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é parametrização de γ , então a curvatura de γ é dada por

$$k(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'| \frac{3}{2}} \text{ e o ocorre anulamento se, e somente se } |\alpha' \wedge \alpha''| = 0.$$

Mas,

$$|\alpha' \wedge \alpha''| = \left| \left(\det \begin{bmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{bmatrix} \right) \right| =$$

$$= \sqrt{\det \begin{bmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{bmatrix}^2 + \det \begin{bmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{bmatrix}^2 + \det \begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{bmatrix}^2} = 0$$

Como, por definição, as três parcelas dentro do radical são os quadrados das curvaturas das projeções nos planos yz , xz e xy respectivamente, o anulamento $|\alpha' \wedge \alpha''| = 0$ implica que estas três parcelas se anulam, para os mesmos pontos e, por outro lado, se as três curvaturas das projeções se anulam simultaneamente, é inevitável que a curvatura da curva no espaço também se anule.

Portanto, vale a *Afirmção*.

Com a afirmação provada, é certo que a *curvatura da projeção da curva no espaço para $a = n^2 + 1$, tem no mínimo, p anulamentos*.

No que se refere ao anulamento torção, veja o *Teorema II* da seção 3.2.1

3.5 Cúspides na S^2 e sua projeções

Já foi provado neste trabalho que se uma curva no espaço tem mudança de sinal na *torção*, então aparecem *cúspides* na respectiva *indicatriz binormal*. Como esta indicatriz é uma curva na S^2 , uma questão interessante, do ponto de vista geométrico, é saber se a projeção nos planos coordenados preservam estas cúspides.



fig. 3.15 Cúspide numa superfície esférica e em sua projeção

Sejam $\alpha : I \rightarrow S^2$ curva regular parametrizada por comprimento de arco tal que

$$\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \text{ e } \pi : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ onde } \pi(s) = (x(s), y(s), 0)$$

3.3.1 Teorema

Se $z(s) > 0$, as cúspides de α correspondem às cúspides de π

Demonstração:

Parte I) Se α tem cúspide em $a \in I$, então π , a projeção ortogonal de α também tem cúspide em a .

Por hipótese, α tem cúspide em $a \in I$, então, por definição,

$$\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} \text{ e } \lim_{s \rightarrow a} \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} = 0 \quad (B)$$

$$\text{Logo, } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{x'(s)}{|\alpha'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{x'(s)}{|\alpha'(s)|}, \quad \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{y'(s)}{|\alpha'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{y'(s)}{|\alpha'(s)|},$$

$$\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{z'(s)}{|\alpha'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{z'(s)}{|\alpha'(s)|} \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow a} \frac{(x'(s), y'(s), z'(s))}{|(x'(s), y'(s), z'(s))|} = 0$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\pi'(s)}{|\alpha'(s)|} &= \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{(x'(s), y'(s), 0)}{|\alpha'(s)|} = \left(\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{x'(s)}{|\alpha'(s)|}, \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{y'(s)}{|\alpha'(s)|}, 0 \right) = \\ &= \left(-\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{x'(s)}{|\alpha'(s)|}, -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{y'(s)}{|\alpha'(s)|}, 0 \right) = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{(x'(s), y'(s), 0)}{|\alpha'(s)|} = \\ &= -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{\pi'(s)}{|\alpha'(s)|}. \end{aligned}$$

$$\text{Ou seja, } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\pi'(s)}{|\alpha'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{\pi'(s)}{|\alpha'(s)|} \quad (A)$$

$$\pi'(a) = (x'(a), y'(a), 0) = (0, 0, 0)$$

$$\text{Precisamos mostrar que } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\pi'(s)}{|\pi'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{\pi'(s)}{|\pi'(s)|} \quad \text{e} \quad \pi'(a) = 0.$$

Mas para isso, é importante saber se há possibilidade de ocorrer $|\pi'(s)| = 0$ para algum s numa vizinhança de a .

Como $\alpha(I) \subset S^2$, $x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2 = 1$. Derivando os dois lados da igualdade,

$$2x'(s)x(s) + 2y'(s)y(s) + 2z'(s)z(s) = 0. \quad (*)$$

Se existe $c \in I$ tal que $\pi'(s) = 0$, então, para este mesmo c , $x'(c) = 0$ e $y'(c) = 0$.

Voltando a (*) com esses dados, tem-se:

$$2x'(c)x(c) + 2y'(c)y(c) + 2z'(c)z(c) = z'(c)z(c) = 0.$$

Como α é regular, $z'(c) \neq 0$. (caso contrário, existiria $c \in I$ de maneira que $\alpha'(c) = (x'(c), y'(c), z'(c)) = (0, 0, 0)$, contrariando a regularidade de α). Assim, em (*) quem se anula é $z(c)$. Isto é, somente quando a curva atravessa o plano xy é que há chance de que exista $c \in I$ tal que $\pi'(c) = 0$.

Então tem sentido considerar :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\pi'(s)}{|\pi'(s)|} &= \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\pi'(s)}{|\pi'(s)|} \frac{|\alpha'(s)|}{|\alpha'(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\pi'(s)}{|\alpha'(s)|} \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|} \quad (A) \\ &= -\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\pi'(s)}{|\alpha'(s)|} \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\pi'(s)}{|\pi'(s)|} \frac{|\alpha'(s)|}{|\alpha'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\pi'(s)}{|\pi'(s)|}, \end{aligned}$$

onde também foi usado que

$$\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|}. \text{ Mas, isto vale, porque } |\pi'(s)| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \leq$$

$$\leq |\alpha'(s)|, \text{ e assim, } \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|} \text{ é limitada. Juntando a isso o fato de que a função } \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|} \text{ é}$$

continua, vale a igualdade presente.

Falta mostrar que $\pi'(a) = 0$.

$$\text{É só observar que } \pi'(a) = \lim_{s \rightarrow a} \frac{\pi'(s)}{|\pi'(s)|} \frac{|\alpha'(s)|}{|\alpha'(s)|} = \lim_{s \rightarrow a} \frac{\pi'(s)}{|\alpha'(s)|} \lim_{s \rightarrow a} \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|} =$$

$$\lim_{s \rightarrow a} \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|} = 0, \text{ usando (B) e a limitação de } \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|}.$$

Portanto, π tem cúspide em a .

O raciocínio é análogo para $z(s) < 0$.

Parte II) Se π tem cúspide em $a \in I$, então α também tem cúspide em a .

Como $\pi(s) = (x(s), y(s), 0)$ e $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \in S^2$, então

$$x^2(s) + y^2(s) + z^2(s) = 1, \text{ e assim sendo, } z(s) = \sqrt{1 - x^2(s) - y^2(s)}.$$

Por hipótese, π tem cúspide em $a \in I$, logo:

$$\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{x'(s)}{|\pi'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{x'(s)}{|\pi'(s)|}, \text{ e } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{y'(s)}{|\pi'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{y'(s)}{|\pi'(s)|}.$$

$$\begin{aligned} \text{Consequentemente, } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{x'(s)}{|\alpha'(s)|} \frac{|\beta'(s)|}{|\beta'(s)|} &= -\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{x'(s)}{|\beta'(s)|} \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{|\beta'(s)|}{|\alpha'(s)|} = \\ &= -\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{x'(s)}{|\beta'(s)|} \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{|\beta'(s)|}{|\alpha'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{x'(s)}{|\pi'(s)|} \end{aligned}$$

$$\text{E também, } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{y'(s)}{|\alpha'(s)|} \frac{|\beta'(s)|}{|\beta'(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{y'(s)}{|\beta'(s)|} \frac{|\beta'(s)|}{|\alpha'(s)|} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{y'(s)}{|\beta'(s)|} \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{|\beta'(s)|}{|\alpha'(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{y'(s)}{|\beta'(s)|} \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{|\beta'(s)|}{|\alpha'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{y'(s)}{|\pi'(s)|}.$$

Afim de mostrar que $\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{z'(s)}{|\pi'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{z'(s)}{|\pi'(s)|}$, considere que

$$\begin{aligned} z'(s) &= -\frac{x(s)x'(s) + y(s)y'(s)}{\sqrt{1 - x^2(s) - y^2(s)}} \text{ e } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{1}{|\pi'(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\lim_{s \rightarrow a^+} x'(s))^2 + (\lim_{s \rightarrow a^+} y'(s))^2}} = \frac{1}{\sqrt{(-\lim_{s \rightarrow a^-} x'(s))^2 + (-\lim_{s \rightarrow a^-} y'(s))^2}} = \\ &= \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}} = \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{1}{|\pi'(s)|} \end{aligned}$$

$$\text{Ou seja, } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{1}{|\pi'(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{1}{|\pi'(s)|} \quad (1)$$

$$\text{Com esses dados, } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{z'(s)}{|\pi'(s)|} = \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{-1}{|\pi'(s)|} \frac{x(s)x'(s) + y(s)y'(s)}{\sqrt{1 - x^2(s) - y^2(s)}} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{1}{|\pi'(s)|} \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2(s) - y^2(s)}} \lim_{s \rightarrow a^+} x(s)x'(s) + y(s)y'(s) =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{1}{|\pi'(s)|} \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2(s) - y^2(s)}} \lim_{s \rightarrow a^+} x(s)x'(s) + y(s)y'(s) \quad (*)$$

$$\text{Quanto ao segundo fator do produto anterior, } \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2(s) - y^2(s)}} =$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1 - (\lim_{s \rightarrow a^+} x(s))^2 - (\lim_{s \rightarrow a^+} y(s))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (-\lim_{s \rightarrow a^-} x(s))^2 - (-\lim_{s \rightarrow a^-} y(s))^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\lim_{s \rightarrow a^-} x(s))^2 - (\lim_{s \rightarrow a^-} y(s))^2}} = \lim_{s \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2(s) - y^2(s)}} \end{aligned} \quad (2)$$

E para a terceira parcela de (*) vale:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow a^+} x(s)x'(s) + y(s)y'(s) &= \lim_{s \rightarrow a^+} x(s) \lim_{s \rightarrow a^+} x'(s) + \lim_{s \rightarrow a^+} y(s) \lim_{s \rightarrow a^+} y'(s) = \\ &= -\lim_{s \rightarrow a^-} x(s) \lim_{s \rightarrow a^-} x'(s) - \lim_{s \rightarrow a^-} y(s) \lim_{s \rightarrow a^-} y'(s) = \lim_{s \rightarrow a^-} x(s)x'(s) + y(s)y'(s), \quad (3) \end{aligned}$$

onde o sinal negativo ocorre pela troca dos limites laterais das derivadas e, na troca dos limites laterais das coordenadas, foi usada a continuidade de π .

Voltando a (*) e substituindo (2) e (3) tem-se a igualdade:

$$\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{z'(s)}{|\pi'(s)|} = -\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{z'(s)}{|\pi'(s)|}.$$

$$\begin{aligned} \text{Além disso, } \lim_{s \rightarrow a} z'(s) &= \lim_{s \rightarrow a} \frac{x(s)x'(s) + y(s)y'(s)}{\sqrt{1 - x^2(s) - y^2(s)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2(a) - y^2(a)}} \lim_{s \rightarrow a} x(s) \lim_{s \rightarrow a} x'(s) + \lim_{s \rightarrow a} y(s) \lim_{s \rightarrow a} y'(s) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2(a) - y^2(a)}} x(a) \lim_{s \rightarrow a} x'(s) + y(a) \lim_{s \rightarrow a} y'(s) \quad (**) \end{aligned}$$

Onde, em (**) foi usado que α é contínua em a .

Sabendo que $\lim_{s \rightarrow a} y'(s) = \lim_{s \rightarrow a} x'(s) = 0$, uma vez que $\lim_{s \rightarrow a} \frac{\pi'(s)}{|\pi'(s)|} = 0$.

Retomando (**) com essa informação, conclui-se definitivamente que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2(a) - y^2(a)}} x(a) \lim_{s \rightarrow a} x'(s) + y(a) \lim_{s \rightarrow a} y'(s) = 0.$$

$$\text{Logo, } \lim_{s \rightarrow a} \frac{z'(s)}{|\pi'(s)|} = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow a} \frac{z'(s)}{|\alpha'(s)|} \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|} = 0.$$

Como $\lim_{s \rightarrow a} \frac{|\alpha'(s)|}{|\pi'(s)|} \neq 0$, resta somente concluir que $\lim_{s \rightarrow a} \frac{z'(s)}{|\alpha'(s)|} = 0$.

Portanto α tem cúspide em a .



Se a curva α toca no plano xy , então pode ser que as cúspides não sejam preservadas pela projeção no plano xy . Este fato é ilustrado pelas figuras abaixo.

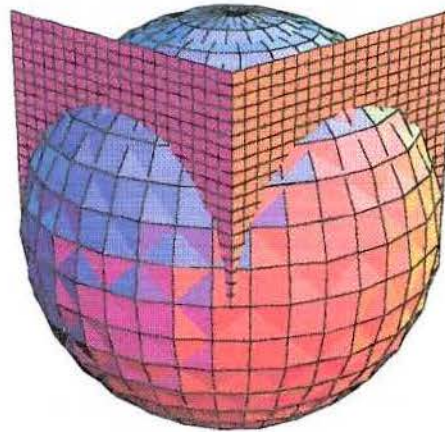


fig. 3.16



fig. 3.17

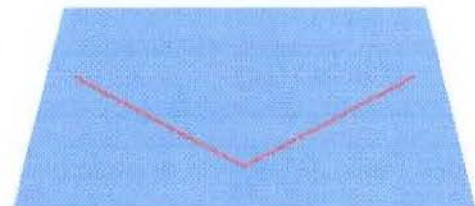


fig. 3.18

A *figura 3.16* consiste na Intersecção dos planos $y = x + 1$ e $y = -x + 1$ com a S^2 .

Esta intersecção gera uma curva no espaço cuja equação paramétrica pode ser dada por:

$$\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que}$$

$$\alpha(t) = \left(t+1, t, \sqrt{1-t^2-(1+t)^2} \right) \text{ se } t \in [-1, 0] \text{ e}$$

$$\alpha(t) = \left(-t+1, t, \sqrt{1-t^2-(1-t)^2} \right) \text{ se } t \in [0, 1]$$

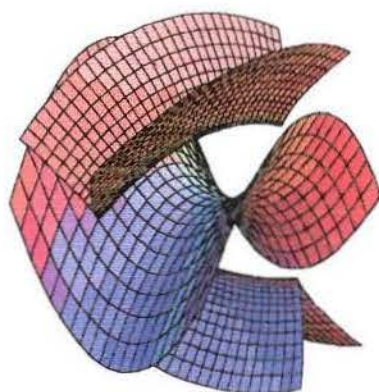
Esta curva é, exatamente aquela mostrada na *figura 3.17*, justaposta à S^2 . Na mesma figura, é visível a reta vertical que forma a intersecção dos dois planos, que é também a reta tangente às duas circunferências originadas pela intersecção dos planos com a S^2 . Como a curva parametrizada é definida pelas duas circunferências, numa vizinhança do ponto 0, a reta tangente à curva em 0 é também a vertical citada. Quando t se aproxima de 0, pela esquerda, o vetor tangente unitário de α é o mesmo que dá direção para a reta comum. Por outro lado, quando t tende a 0 pela direita, o vetor tangente à curva também dá direção à reta vertical, no entanto, com sentido contrário. Essa situação caracteriza a existência de uma cúspide em 0. A projeção do traço de α , numa vizinhança de 0, no plano xy é a curva $(t+1, t, 0)$ se $t \in [-1, 0]$ e $(t-1, t, 0)$, se $t \in [0, 1]$ que consiste na reunião de dois segmentos de reta não colineares, como representado na *fig. 3.18*. Pelo fato de os dois segmentos de reta não serem colineares, em momento algum os vetores tangentes de cada um deles terão sentidos opostos, e assim, *não há cúspide em 0* para esta projeção.

Isto significa que não se pode abdicar da hipótese de não anulamento da terceira coordenada de α .

Ainda que haja um número finito de cúspides em S^2 , é sempre possível escolher um plano que não passe por nenhuma delas. Com isso, sempre tem-se associada à curvas numa superfície esférica com n cúspides outra curva, porém plana, com também n cúspides.

CAPÍTULO VI

SUPERFÍCIES:
CURVATURAS PRINCIPAIS
E
SUPERFÍCIES FOCAIS,



4.1 Introdução

Introduzimos aqui, de forma discursiva, os conceitos e resultados sobre superfícies, interpretando geometricamente e fazendo uma análise visual comparativa em exemplos clássicos.

Algumas referências são [15], [1], [10] e, para a parte de superfícies focais [11].

4.2 Noção de Superfície

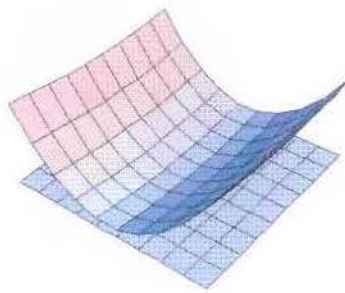


fig 4-1

Consideraremos as *superfícies* como sendo aplicação diferenciável definida numa região conexa do plano G , assumindo valores no espaço. Isto é, $\Sigma : G \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Σ é totalmente descrita por funções reais diferenciáveis $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$ e $z = z(t, u)$, definidas de G em \mathbb{R}^3 chamadas *funções coordenadas* de Σ .

A notação $\Sigma(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u))$ indica que qualquer ponto de Σ pode ser localizado no \mathbb{R}^3 usando-se as funções coordenadas desta. Essa descrição, assim como para o caso das curvas é chamada *paramétrica* e t e u são os *parâmetros* de Σ .

Uma superfície é regular se, em cada um de seus pontos, ela possui uma representação paramétrica, $\Sigma(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u))$, com funções coordenadas regulares, tais que o

posto da matriz
$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \end{bmatrix}$$
 é dois.

Usando a notação $\Sigma_u = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du} \right)$ e $\Sigma_v = \frac{\partial \Sigma}{\partial v} = \left(\frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv} \right)$, isto significa

que o vetor $\Sigma_u \wedge \Sigma_v$ é não nulo, ou equivalentemente, os vetores tangentes às curvas coordenadas, Σ_u e Σ_v , não são paralelos e ou nulos. Os pontos para os quais o posto de M não é dois são os *pontos singulares* de Σ .

4.2 Planos Tangente e Normal à uma superfície

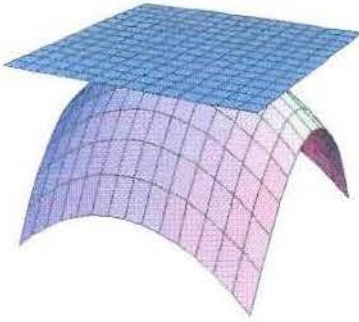


fig. 4.2 plano tangente

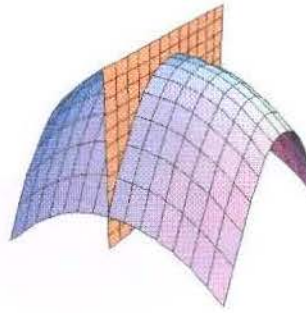


fig. 4.3 Um plano normal

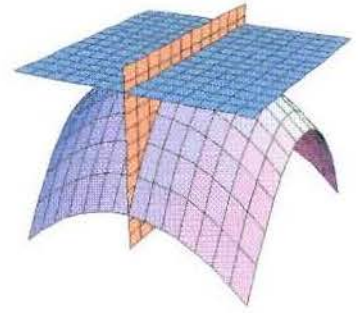


fig. 4.4

Denotando por Σ uma superfície regular e $P = \Sigma(a, b)$.

Consideremos um plano β passando por P , tome Q distinto de P na superfície e denotemos a distância de P a β por d e a distância de Q a β por h . β é dito *tangente* a Σ em P se a razão $\frac{h}{d} \rightarrow 0$ quando $P \rightarrow Q$ (figura 4.2).

Uma superfície regular possui, em cada ponto, *um* e somente um plano tangente.

Este plano é, justamente, o único plano paralelo ao plano gerado pelos vetores $\Sigma_u(a, b)$ e $\Sigma_v(a, b)$ e passando por P . Todos os pontos do plano tangente, num ponto P , são translações de combinações lineares dos vetores $\Sigma_u(a, b)$ e $\Sigma_v(a, b)$, ou ainda, são os pontos Q tais que $(P - Q) \cdot (\Sigma_u \wedge \Sigma_v) = 0$.

Se $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ é uma curva no domínio, G , de Σ passando por (a, b) , então $\gamma(s) = \Sigma(\alpha(s))$ é uma curva sobre a superfície. O *vetor tangente* de Σ em (a, b) é definido como sendo o *vetor tangente* de cada curva γ no ponto (a, b) . Como G é aberto e conexo, existem infinitas curvas passando por (a, b) , conseqüentemente, tem-se infinitos vetores tangentes que, por

sua vez, determinam uma reta tangente cada. Essas retas também são tangentes à Σ em (a, b) . O plano tangente de Σ pode ser visto como aquele formado por todas essas retas tangentes de Σ .

O vetor $n(u, v) = \frac{\Sigma_u(u, v) \wedge \Sigma_v(u, v)}{|\Sigma_u(u, v) \wedge \Sigma_v(u, v)|}$ é um vetor normal à $\Sigma_u(u, v)$ e à $\Sigma_v(u, v)$

simultaneamente, isto é, $n(u, v)$ é vetor unitário normal ao plano tangente. Este vetor é dito *vetor normal* de Σ em (u, v) e todo plano que o contém é normal ao plano tangente e denominado *plano normal* de Σ em (u, v) (figura 4.3). A reta com direção $n(u, v)$ passando por $\Sigma(a, b)$ é a *reta normal* de Σ em (a, b)

4.3- As Formas Fundamentais e as curvaturas

Sejam $\Sigma : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular e $\alpha : I \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ curva plana tal que $\alpha(t) = (u(t), v(t))$. Assim, a imagem de $\alpha(I)$ por Σ é uma curva sobre o traço de Σ e pode ser representada por: $\gamma = \Sigma(x(t), y(t))$

O comprimento de arco de γ é:

$$\begin{aligned} l &= \int \sqrt{\gamma'_t \cdot \gamma'_t} dt = \int \sqrt{\Sigma_u^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\Sigma_u \Sigma_v \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + \Sigma_v^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt = \\ &= \int_a \sqrt{\Sigma_u^2 (du)^2 + 2\Sigma_u \Sigma_v (du)(dv) + \Sigma_v^2 (dv)^2} \text{ onde } \int_a \text{ é denota a integral sobre } \alpha. \end{aligned}$$

A forma quadrática:

$$\Sigma_u^2 (du)^2 + 2\Sigma_u \Sigma_v (du)(dv) + \Sigma_v^2 (dv)^2$$

é chamada *primeira forma fundamental*.

Usando a notação $E = \Sigma_u^2$, $F = \Sigma_u \Sigma_v$ e $G = \Sigma_v^2$, o comprimento de γ é:

$$\int_a \sqrt{E(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2}$$

A área de uma superfície também pode ser caracterizada em termos dos coeficientes E , F e G da primeira forma fundamental por:

$$S = \int_{\Sigma} \int \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Considere ainda uma curva γ sobre a superfície, parametrizada por comprimento de arco.

Pelas fórmulas de Frenet, $\gamma''_{ss} = kv$, onde k é a curvatura de γ e v é o vetor tangente unitário de γ .

Multiplicando por n , vetor normal principal unitário de Σ , obtem-se $\gamma''_{ss}n = k \cos \theta$, (*) onde θ é o ângulo entre n e v . Mas, usando a primeira forma fundamental em (*), segue que

$$\gamma''_{ss}n = \frac{\Sigma_{uu}.n \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\Sigma_{uv}.n \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + \Sigma_{vv}.n \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}{E.(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2} \quad (**)$$

Denotando $e = \Sigma_{uu}.n$, $f = \Sigma_{uv}.n$ e $g = \Sigma_{vv}.n$ em (**):

$$k \cos \theta = \frac{e(du)^2 + 2f(du)(dv) + g(dv)^2}{E.(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2} \quad (***)$$

A forma quadrática no numerador de $k \cos \theta$ é a *segunda forma fundamental*. E por (***), nota-se que $k \cos \theta$ depende somente da direção do vetor tangente da curva. Logo, curvas com tangente comum possuem o mesmo valor para $k \cos \theta$. Tomando a curva que é fruto da intersecção do plano normal ao plano tangente com Σ , obtém-se a curvatura da secção normal de Σ .

$$k_0 = \frac{e(du)^2 + 2f(du)(dv) + g(dv)^2}{E.(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2}$$

As *curvaturas principais* de Σ , são definidas como aquelas que assumem valores extremos. Usando a notação k_+ e k_- para as *curvaturas máxima* e *mínima* respectivamente, a *curvatura gaussiana* é definida por $K = k_+ k_-$ e a *curvatura média* é $H = \frac{k_+ + k_-}{2}$.

Em relação aos coeficientes das formas fundamentais:

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \text{ e } K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

expressões através das quais se pode encontrar as curvaturas principais k_+ e k_- usando apenas os coeficientes das formas fundamentais.

Os pontos para os quais a curvatura máxima e mínima tem o mesmo valor são chamados *pontos umbílicos*. Nas sessões 4.6 a 4.8 ilustramos, de forma comparativa, estes conceitos e correlacionamos uma superfície com outras superfícies associadas, chamadas superfícies focais,

de forma análoga ao que fizemos com as curvas e suas evolutas.

4.4 O Parabolóide Osculador à uma superfície

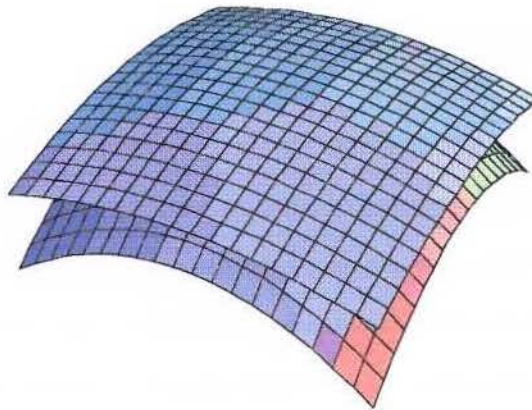


fig. 4.5

Uma curva α pode ser aproximada, localmente, por retas e círculos que traduzem certas propriedades de α . No caso de uma superfície Σ , é razoável procurar uma aproximação de Σ por outra superfície. É neste contexto que surge a figura do *parabolóide osculador*.

Podemos definir o parabolóide osculador à Σ em um ponto (a, b) da seguinte maneira:

Sejam Σ uma superfície regular, com derivadas contínuas até segunda ordem, P um ponto de Σ e U , um parabolóide. Tome em Σ um ponto Q perto de P . Uma reta passando por Q , paralela ao eixo x , intercepta o parabolóide num ponto Q' . Denote por h a distância entre Q e Q' e por d a distância entre P e Q . U é o *parabolóide osculador* de Σ em um ponto P se $\frac{h}{d^2} \rightarrow 0$ quando $Q \rightarrow P$.

Em cada ponto de Σ , existe um e somente um parabolóide osculador. Em termos de contato, o parabolóide osculador tem contato de ordem dois com a superfície, por definição. Podemos determinar a equação deste parabolóide por: $z = \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{2}y^2$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas máximas e mínimas em P e o referencial x, y e z tem centro em P e eixos assentados nas direções principais de curvatura máxima, mínima e na direção do vetor normal à superfície, respectivamente.

O parabolóide osculador tem as mesmas curvaturas seccionais da superfície original.

Conforme tivermos $k_1 k_2 > 0$, $k_1 k_2 < 0$ ou $k_1 k_2 = 0$, teremos que o parabolóide osculador é *elíptico*, *hiperbólico* ou *parabólico* e o ponto correspondente sobre a superfície receberá a mesma designação.

4.5 Superfícies Focais

Dada uma curva regular plana α , sempre existe a *evoluta* de α , que é outra curva plana que está associada à α através da curvatura, e que pode apresentar cúspides em ocasiões que já determinadas. *De modo geral, o contato de α com sua reta normal é de ordem um em todos os pontos desta reta exceto pelos que pertencem à evoluta de α , cujo contato é de ordem dois, e, exceto nos pontos de cúspides desta, que possuem contato de ordem três com α . Estamos considerando o contato de um ponto Q da reta normal em P com a curva, como sendo o contato do círculo que tem centro em Q e passa por P .*

Acontece que esta análise pode ser estendida para *superfícies*. Podemos analisar o contato entre uma superfície S e suas *retas normais*.

Para cada reta normal, podem ser obtidos *dois pontos focais*, um através do centro do *círculo osculador* na direção de curvatura máxima e outro pela curvatura mínima. Fazendo isto para cada ponto da superfície, são construídas duas outras superfícies. Tais superfícies são chamadas *Superfícies Focais ou Evolutas* e constituem uma generalização do conceito de *evoluta*, como se pode constatar pela construção feita. Essas superfícies terão, então, equações paramétricas:

$$S_+(u, v) = S(u, v) + \frac{1}{k_+(u, v)} n(u, v) \text{ e } S_-(u, v) = S(u, v) + \frac{1}{k_-(u, v)} n(u, v)$$

Quando as duas superfícies focais se encontram se, e só se, curvatura máxima e mínima coincidem, e tais pontos são chamados de *umbílicos*.

Com esta definição, agora podemos fazer uma classificação dos pontos na normal de uma superfície. Para cada ponto da reta normal a uma superfície que não pertence à superfície focal desta, o contato entre a superfície e a reta é de ordem um. Estamos considerando o contato de um ponto Q sobre a superfície em P , como sendo o maior contato entre esta e um círculo de centro em

Q passando por P . Se o ponto está na superfície focal, o contato é de ordem dois.

Assim como a evoluta de uma curva plana pode possuir cúspides, as superfícies focais podem apresentar uma entidade geométrica correspondente: são as *arestas cuspidais*, que, por sua vez, podem ter cúspides. Os pontos das arestas cuspidais, em geral, tem contato de ordem três com S , exceto pelos pontos de cúspides, onde o contato com S é de ordem quatro. Os pontos de arestas cuspidais estão em curvas da evoluta que são as análogas aos vértices das curvas planas.

Dependendo da superfície, podem ocorrer várias situações com as suas superfícies focais.

Nas próximas páginas, faremos um estudo de alguns exemplos que ilustram, de modo geral, o posicionamento das superfícies focais em relação à superfície geradora.

4.6 O Parabolóide Elíptico.

A figura principal deste nosso primeiro estudo é o parabolóide elíptico, \mathcal{P} , com a seguinte parametrização:

$$\mathcal{P}: I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \mathcal{P}(u, v) = (u, v, 2u^2 + v^2)$$

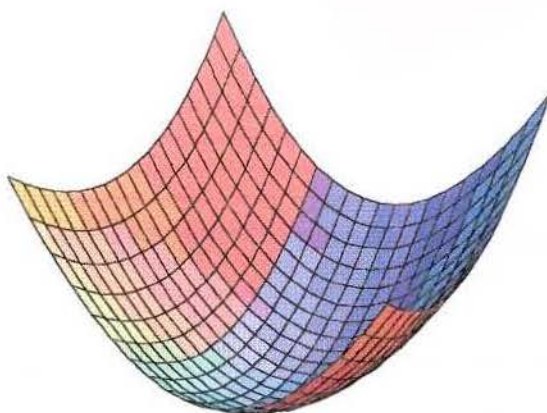


fig. 4.6.1 Parabolóide elíptico

Os coeficientes das formas fundamentais para \mathcal{P} são:

$$E = (1, 0, 4u) \cdot (1, 0, 4u) = 1 + 16u^2;$$

$$F = (0, 1, 2v) \cdot (1, 0, 4u) = 8uv;$$

$$G = (0, 1, 2v) \cdot (0, 1, 2v) = 1 + 4v^2;$$

$$e = \frac{-4}{\sqrt{1 + 16t^2 + 4u^2}};$$

$$f = 0;$$

$$g = \frac{-2}{\sqrt{1 + 16t^2 + 4u^2}}$$

Logo, a curvatura Gaussiana e Média são, respectivamente:

$$K = \frac{-8}{(1 + 16t^2 + 4u^2)^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{1 - 16t^2 + 8u^2}{(1 + 16t^2 + 4u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

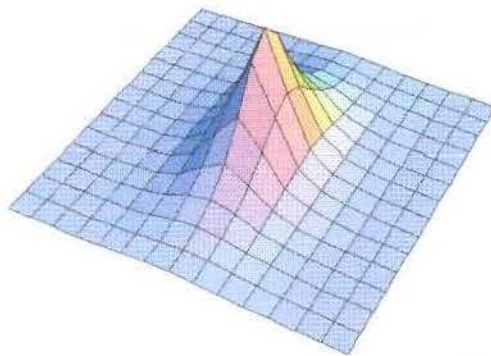


fig. 4.6.2

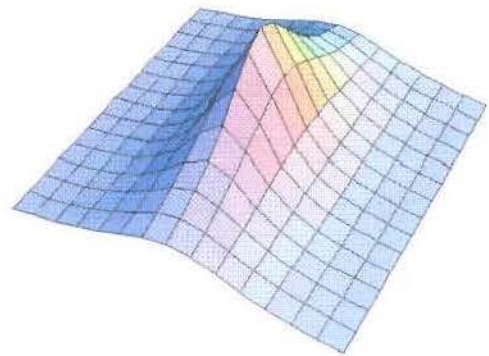


fig. 4.6.3

As figuras 4.6.2 e 4.6.3 são os gráficos da curvatura gaussiana, e da curvatura média respectivamente.

Denotando a curvatura máxima por: k_+ e por k_- a curvatura mínima, podemos encontrá-las usando as relações seguintes:

$$K = k_+ k_- \quad \text{e} \quad M = \frac{k_+ + k_-}{2}$$

As curvaturas máximas e mínimas são dadas por:

$$k_+(u, v) = \frac{-8}{(1 + 16u^2 + 4v^2)^2} + \sqrt{\frac{-8}{(1 + 16u^2 + 4v^2)^4} + \frac{1 - 16u^2 + 4v^2}{(1 + 16u^2 + 4v^2)^{\frac{3}{2}}}} \text{ e}$$

$$k_-(u, v) = \frac{-8}{(1 + 16u^2 + 4v^2)^2} - \sqrt{\frac{-8}{(1 + 16u^2 + 4v^2)^4} + \frac{1 - 16u^2 + 4v^2}{(1 + 16u^2 + 4v^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Então, denotando por $n(u, v) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{P}(u, v), \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{P}(u, v) \right)}{\left| \left(\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{P}(u, v), \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{P}(u, v) \right) \right|}$ o vetor normal à \mathcal{P} , em

(u, v) , as parametrizações das superfícies focais máximas e mínimas são, respectivamente:

$$S_+(u, v) = \mathcal{P}(u, v) + \frac{1}{k_+(u, v)} n(u, v), \text{ e } S_-(u, v) = \mathcal{P}(u, v) + \frac{1}{k_-(u, v)} n(u, v).$$

As figuras 4.6.4, 4.6.5, 4.6.6 e 4.6.7 ilustram o processo de construção das superfícies focais para alguns pontos.

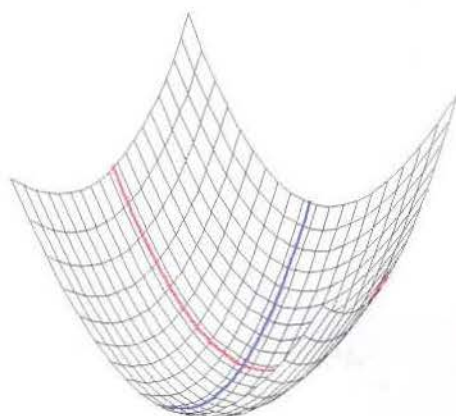


fig. 4.6.4

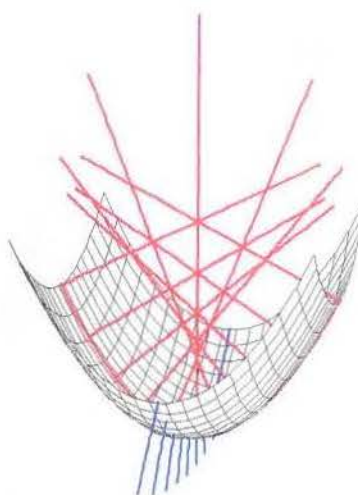


fig. 4.6.5

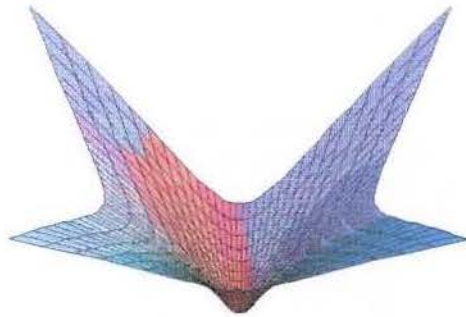


fig 4.6.6 *Superfície focal máxima*

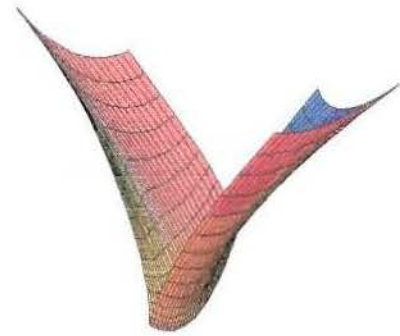


fig 4.6.7 *Superfície focal mínima*

Na da superfície focal mínima, é evidente a presença de uma aresta cuspidal, como podemos ver pela figura 4.6.7.

As superfícies em questão simultaneamente, numa vizinhança de $(0, 0, 0)$, e são dadas pela figura 4.6.8 dado pela próxima figura, onde percebemos que as duas superfícies focais localizam se do mesmo lado de \mathcal{P} , numa vizinhança da origem.

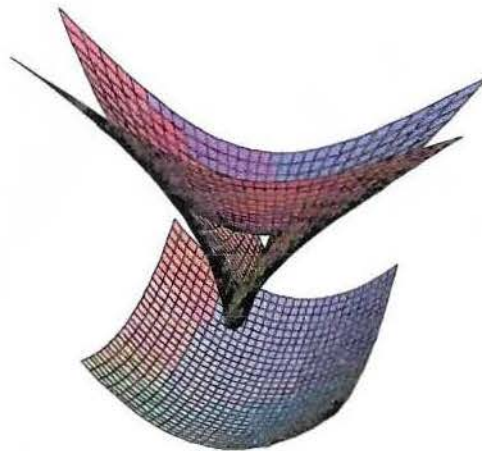


fig. 4.6.8

Como podemos notar, as duas superfícies focais não se tocam. Logo, não há pontos umbilicos para o parabolóide estudado numa vizinhança de $(0, 0, 0)$.

Quanto às curvaturas média e gaussiana, uma maneira interessante de observá-las é através da variação de tonalidade de uma cor na própria superfície original. Os parabolóides elípticos a seguir são coloridos de acordo com a curvatura Gaussiana (figuras 4.6.9 e 4.6.10) ou Média (figuras 4.6.11 e 4.6.12).

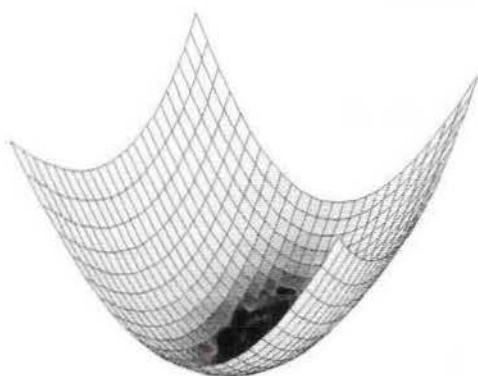


fig. 4.6.9

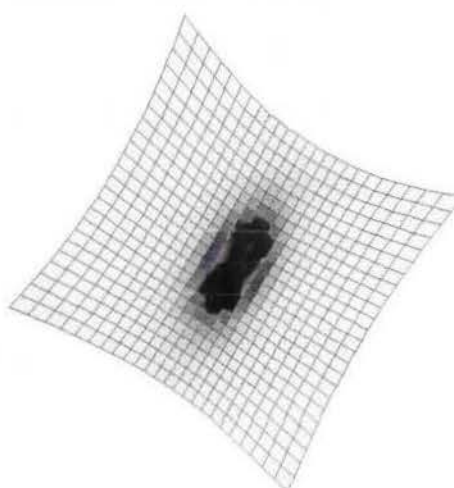


fig. 4.10

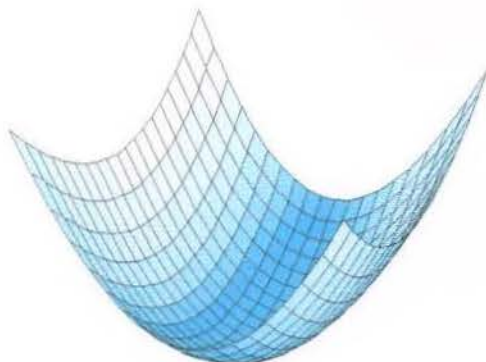


fig. 4.11

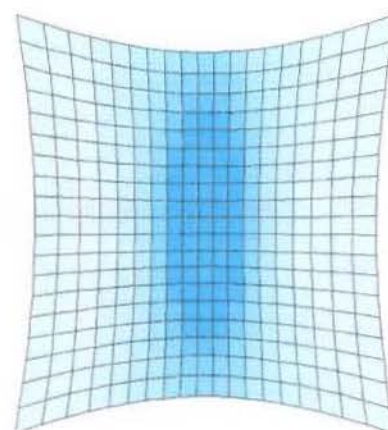


fig. 4.12

Nesta configuração, os pontos que apresentam coloração mais intensa possui um maior valor para a curvatura gaussiana (*figura 4.9*) ou média (*figura 4.11*) e as figuras 4.6.10 e 4.6.12 correspondem a projeção de 4.6.9 e 4.6.11 para melhor visualização da variação das curvaturas.

4.7 A Sela (Parabolóide Hiperbólico)

Nesta seção, faremos com a sela, \mathcal{S} um trabalho similar ao realizado para o parabolóide.

Considere, para isso, a seguinte parametrização de \mathcal{S} .

$$\mathcal{S}: I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \mathcal{S}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), \text{ onde } I, J \text{ são intervalos da reta.}$$

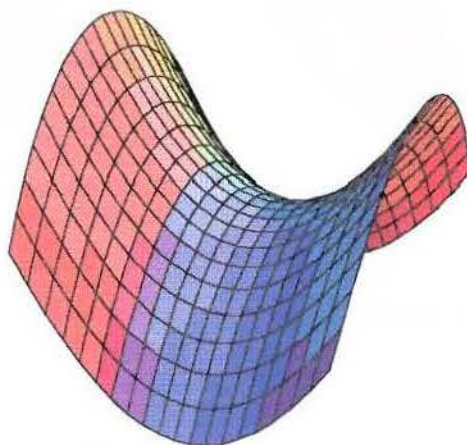


fig. 4.7.1

Os coeficientes das formas fundamentais para \mathcal{S} , são:

$$E = 1 + 4u^2;$$

$$F = -4uv;$$

$$G = 1 + 4v^2;$$

$$e = \frac{2}{\sqrt{1 + 4v^2 + 4u^2}};$$

$$f = 0;$$

$$g = \frac{-2}{\sqrt{1 + 4v^2 + 4u^2}};$$

Logo, a curvatura Gaussiana e Média são, respectivamente:

$$K = \frac{-4}{(1 + 4v^2 + 4u^2)^2}; \quad \text{e} \quad H = \frac{4(u^2 - v^2)}{(1 + 4v^2 + 4u^2)^{\frac{3}{2}}};$$

cujos gráficos são dados nas seguintes figuras:

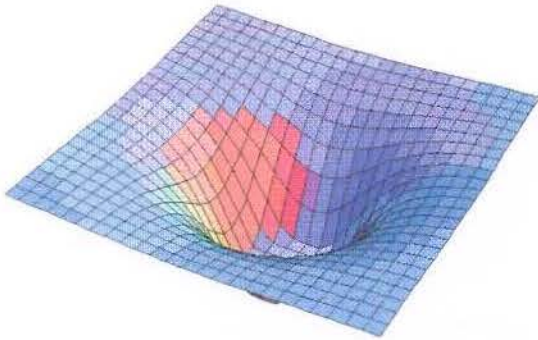


fig 4.7.2 Curvatura gaussiana da sela

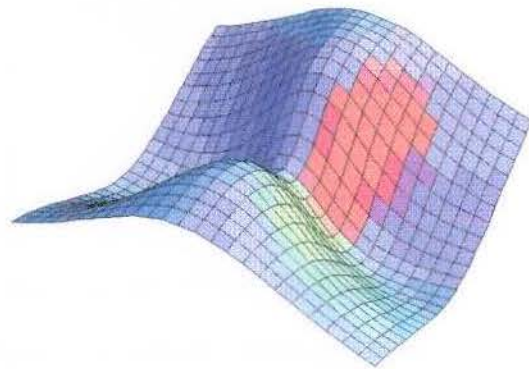


fig. 4.7.3 Curvatura Média de S

Denotando por k_+ e k_- as curvaturas máxima e mínima, encontramos, da mesma maneira que fizemos para o primeiro caso:

$$k_+ = \frac{-4(-u^2 + v^2)}{(1 + 4v^2 + 4u^2)^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{\frac{1 + 4u^2 + 4u^4 + 4v^2 - 8u^2v^2}{(1 + 4v^2 + 4u^2)^3}} \quad \text{e}$$

$$k_- = \frac{-4(-u^2 + v^2)}{(1 + 4v^2 + 4u^2)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{\frac{1 + 4u^2 + 4u^4 + 4v^2 - 8u^2v^2}{(1 + 4v^2 + 4u^2)^3}};$$

Então, se $n(u, v) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u} S(u, v), \frac{\partial}{\partial v} S(u, v) \right)}{\left| \left(\frac{\partial}{\partial u} S(u, v), \frac{\partial}{\partial v} S(u, v) \right) \right|}$ é a notação para o vetor normal unitário a S

em (u, v) , as parametrizações das superfícies focais para S obedecem a mesma forma que no primeiro caso e o processo de construção para estas a partir de S , para alguns pontos, ilustramos nas figuras 4.7.4 e 4.7.5.

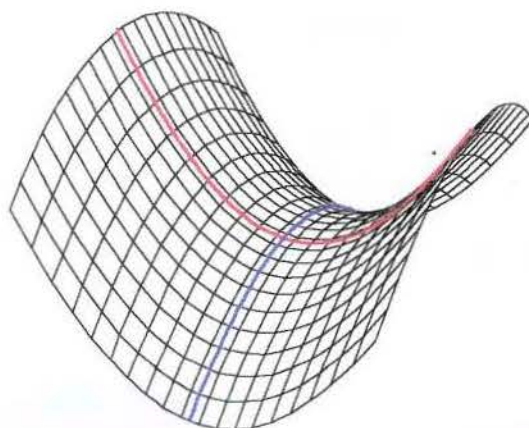


fig. 4.7.4

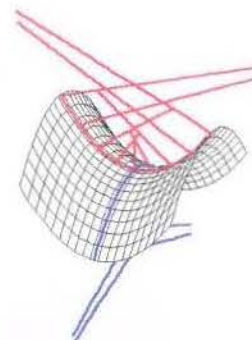


fig. 4.7.5

As figuras 4.7.6 e 4.7.7, são os traços das superfícies focais máxima e mínima respectivamente, numa vizinhança da origem.

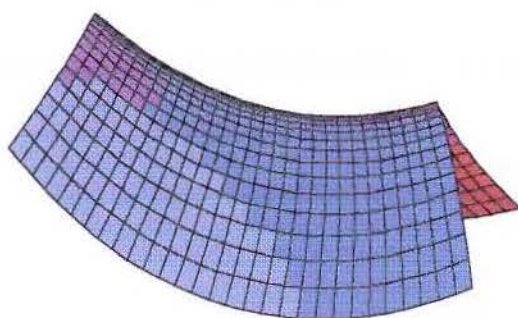


fig. 4.7.6 *Superfície focal máxima*

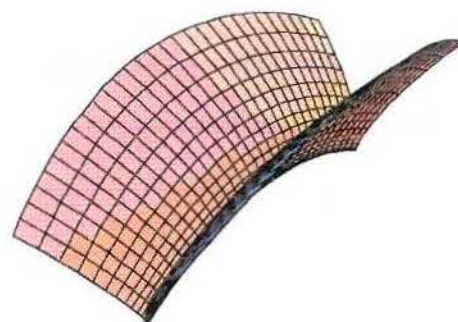


fig. 4.7.7 *Superfície focal mínima*

Vale notar que as figuras 4.7.6 e 4.7.7 apresentam arestas cuspidais nas superfícies. A figura 4.7.8 sobrepõe a sela e suas superfícies focais.

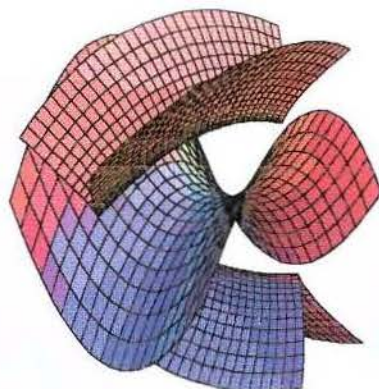


fig.4.7.8

Como podemos perceber, as duas superfícies focais não se tocam. Logo, não há pontos umbílicos para sela, numa vizinhança de zero

A superfície da sela colorida de acordo com o valor da curvatura gaussiana é mostrada nas figuras 4.7.9 e 4.7.10 e, de acordo com a curvatura média, nas figuras 4.7.11 e 4.7.12

Sob o aspecto comparativo, quanto mais intensas são as cores, maior é o valor da curvatura gaussiana (*figuras 4.7.9 e 4.7.10*) e média (*figuras 4.7.11 e 4.7.12*).

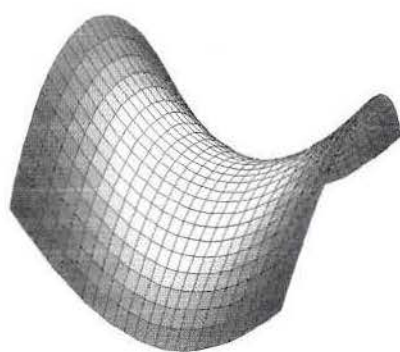


fig. 4.7.9

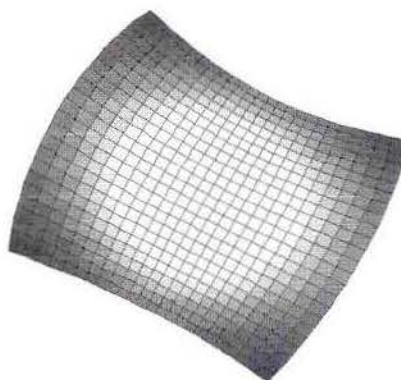


fig. 4.7.10

As figuras 4.7.10 e 4.7.12 são as projeções no plano horizontal de 4.7.9 e 4.7.11.

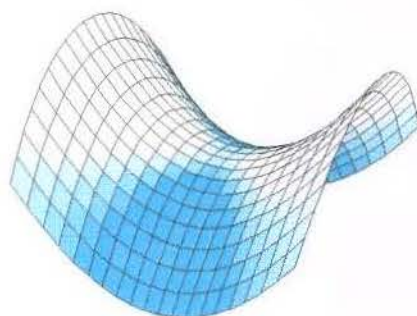


fig. 4.7.11

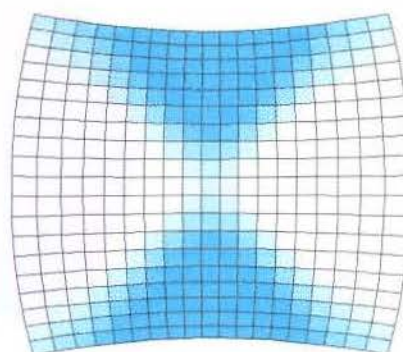


fig. 4.7.12

4.8 Parabolóide Circular

Para este terceiro caso, consideremos a superfície gerada pela revolução da parábola:

$p : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $p(u) = (0, u, u^2)$

Com isso, a expressão para superfície é:

$\mathcal{R}: I = [-1, 1] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $\mathcal{R}(u, v) = (u \operatorname{sen} v, u \cos v, u^2)$

E a superfície é:

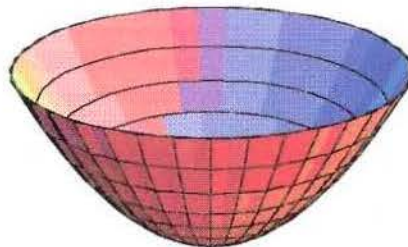


fig.4.8.1

Os coeficientes das formas fundamentais para \mathcal{R} são:

$$E = 1 + 4u^2;$$

$$F = 0;$$

$$G = u^2;$$

$$e = \frac{2u}{\sqrt{u^2 + 4u^4}};$$

$$f = 0;$$

$$g = \frac{2t^3}{\sqrt{t^2 + 4t^4}}$$

Logo, a curvatura gaussiana e média são, respectivamente:

$$K = \frac{4}{(1 + 4t^2)^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{2t^3(1 + 2t)}{\sqrt{t^2 + 4t^4}^3}$$

cujos gráficos são exatamente:

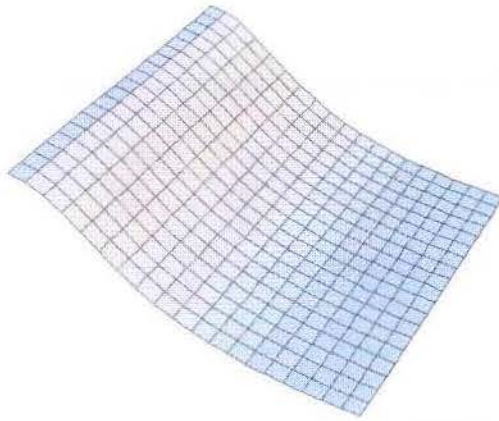


fig. 4.8.2 *Curvatura gaussiana*



fig. 4.8.2 *Curvatura média*

Denotando por k_+ e k_- as curvaturas máxima e mínima e usando o mesmo raciocínio dos outros dois casos anteriores, encontramos:

$$k_+ = \frac{4}{(1+4t^2)^2} + \sqrt{\frac{16}{(1+4t^2)^2} + \frac{2t^3(1+2t)}{\sqrt{t^2+4t^4}^3}} \quad \text{e}$$

$$k_- = \frac{4}{(1+4t^2)^2} - \sqrt{\frac{16}{(1+4t^2)^2} + \frac{2t^3(1+2t)}{\sqrt{t^2+4t^4}^3}}$$

Então, com a notação $n(u, v) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{R}(u, v), \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{R}(u, v)\right)}{\left|\left(\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{R}(u, v), \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{R}(u, v)\right)\right|}$ para o vetor normal unitário de

\mathcal{R} em (u, v) , as parametrizações das superfícies focais de têm a mesma forma que nos dois casos anteriores e a mesma construção a partir de \mathcal{R} .

Para uma vizinhança de $(0, 0, 0)$, podemos visualizar as superfícies focais, mostradas nas duas figuras a seguir:

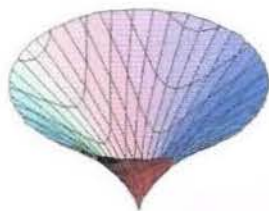


fig.4.8.4 Superfície focal máxima de \mathcal{R}

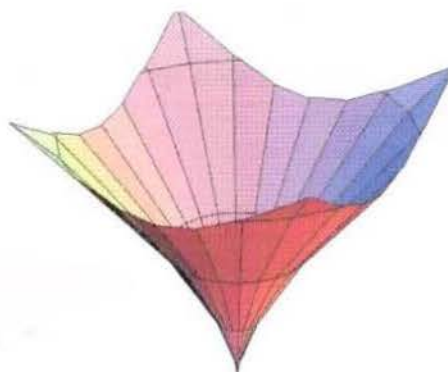


fig.4.8.5 Superfície focal mínima de \mathcal{R}

Uma visualização das duas focais juntas, como na próxima figura, facilita a localização de prováveis pontos umbílicos.

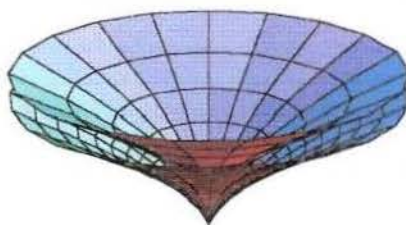


fig.4.8.6 Focais juntas

Vale ressaltar que as duas superfícies focais têm cuspides.

Colocando o traço das duas superfícies juntos podemos notar que há um ponto de intersecção. Este ponto se dá, justamente, no vértice da parábola geradora da superfície. A justificativa para esse fato vem da natureza da superfície. Por ser de revolução em torno do eixo z , quando tomamos o ponto $(0.5, 0, 0)$, que é o vértice do parabolóide, qualquer secção normal mostra sempre uma cópia da parábola inicialmente considerada para a construção da superfície. Assim, como todas as secções normais são coincidentes, a menos de uma rotação no espaço, a curvatura de todas essas secções é a mesma no vértice. Logo, a curvatura máxima é a mesma que a mínima e podemos

concluir que o ponto em questão é umbílico.

As três superfícies juntas aparecem na figura a seguir:

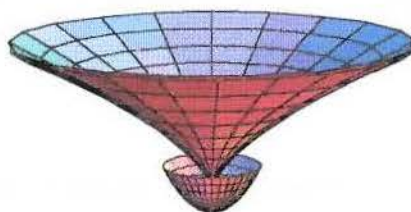


fig.4.8.7

A figura na parte mais baixa do quadro é parte do parabolóide estudado, enquanto que as duas superfícies focais estão logo acima, "uma dentro da outra", porém, tocando-se em um único ponto.

A coloração de acordo com a *curvatura gaussiana* é dada nas duas figuras 4.8.8 e 4.8.9 e, a intensidade da cor é maior para os valores maiores da *curvatura gaussiana*. A 4.8.9 é a projeção horizontal da 4.8.8.

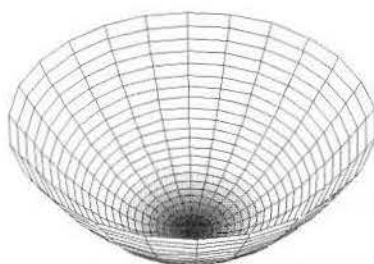


fig. 4.8.8

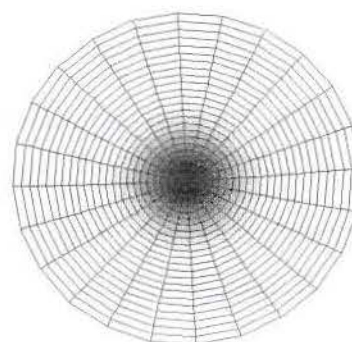


fig. 4.8.9

A figura 4.8.11 é projeção da figura 4.8.10 no plano horizontal, colorida segundo a *curvatura*

média. A intensidade da cor também é diretamente proporcional aos valores da curvatura em questão.

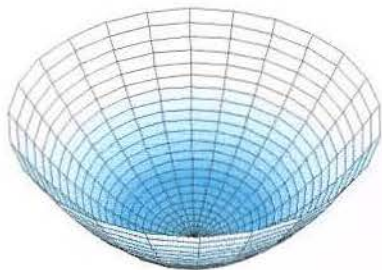


fig. 4.8.10

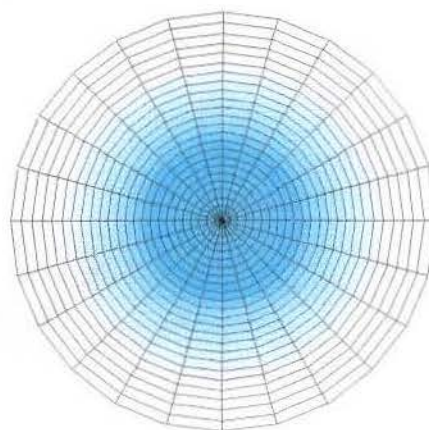


fig. 4.8.11

4.9 A Sela de Macaco

Como quarto caso, consideremos a sela de macaco com parametrização:

$$\mathcal{M}: I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por: } \mathcal{R}(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$$

A superfície é:

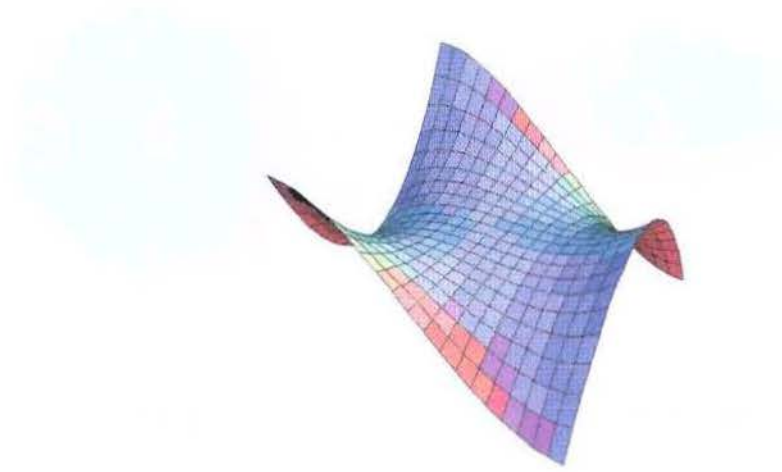


fig. 4.9.1

Os coeficientes das formas fundamentais para \mathcal{M} são:

$$E = 1 + (3u^2 - 3v^2);$$

$$F = -18uv(u^2 - v^2);$$

$$G = 1 + 36v^2u^2;$$

$$e = \frac{6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}};$$

$$f = \frac{-6v}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}};$$

$$g = \frac{-6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}$$

Logo, a curvatura gaussiana e média são, respectivamente:

$$K = \frac{-36(u^2 + v^2)}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{27u(-u^4 + 2u^2v^2 + 3v^4)}{(\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4})^3}$$

cujos gráficos são exatamente:

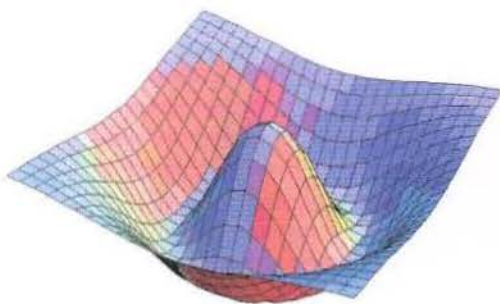


fig. 4.9.2 Curvatura gaussiana

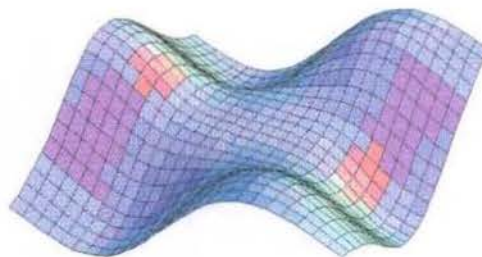


fig. 4.9.3 Curvatura média

Denotando por k_+ e k_- as curvaturas máxima e mínima e usando o mesmo raciocínio dos outros dois casos anteriores, encontramos:

$$k_+ = H + \sqrt{H^2 - M} \quad \text{e}$$

$$k_- = H - \sqrt{H^2 - M}, \text{ onde } K \text{ e } H \text{ estão indicados anteriormente.}$$

$$\text{Então, com a notação } n(u, v) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{M}(u, v), \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{M}(u, v) \right)}{\left| \left(\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{M}(u, v), \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{M}(u, v) \right) \right|} \text{ para o vetor normal unitário}$$

de \mathcal{M} em (u, v) , as parametrizações das superfícies focais de têm a mesma forma que nos dois casos anteriores e a mesma construção a partir de \mathcal{M} .

Para uma vizinhança de $(0, 0, 0)$, podemos visualizar as superfícies focais, mostradas nas figuras 4.9.4 e 4.9.5.

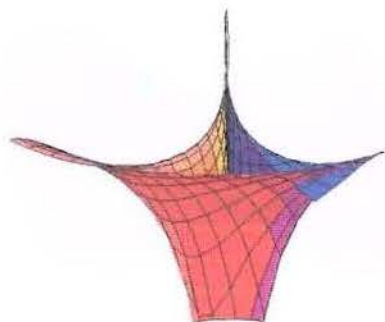


fig 4.9.4

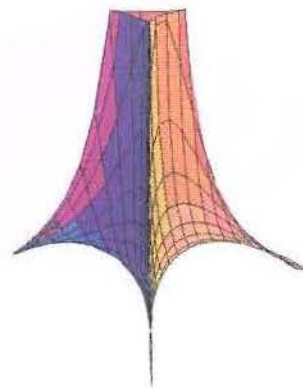


fig 4.9.5

Uma visualização das duas focais juntas com a superfície facilita a localização de prováveis pontos umbilicos, como ilustra a *figura 4.9.6*.

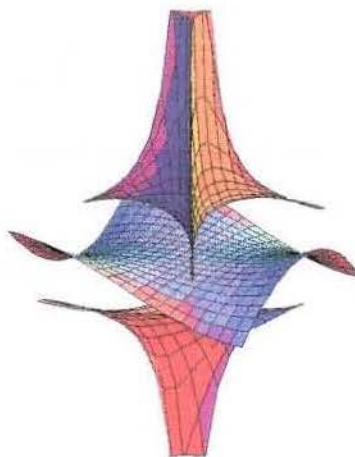


fig.4.9.6

Observando as superfícies focais numa vizinhança da origem, percebemos que ambas não estão definidas em $(0, 0, 0)$ pois, o valor das curvaturas máxima e mínima é *nulo* aí. Assim, apesar de termos um ponto umbilico na origem, as duas superfícies focais não se tocam neste ponto, oque constitui um caso diferenciado dos que estudamos até agora.

Colorindo a sela de macaco de acordo com a *curvatura gaussiana* obtemos a figura 4.9.7 e 4.9.8 e, a intensidade da cor é maior para os valores maiores da *curvatura gaussiana*. A 4.9.8 é a projeção horizontal da 4.9.7.

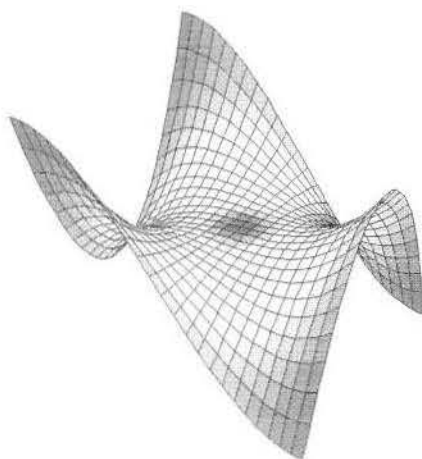


fig.4.9.7

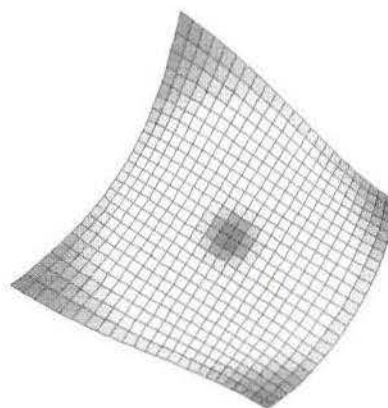


fig.4.9.8

A *figura 4.9.10* é a projeção da *figura 4.9.9* no plano horizontal, colorida segundo a *curvatura média*. A intensidade da cor também é diretamente proporcional aos valores da curvatura em questão.

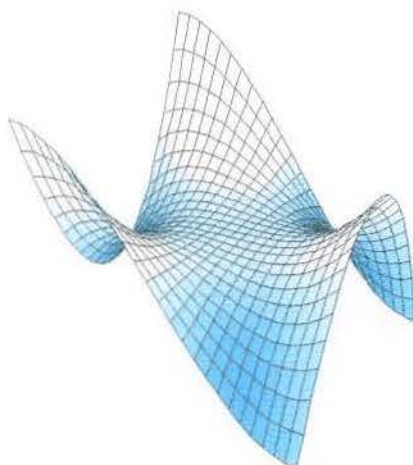


fig.4.9.9

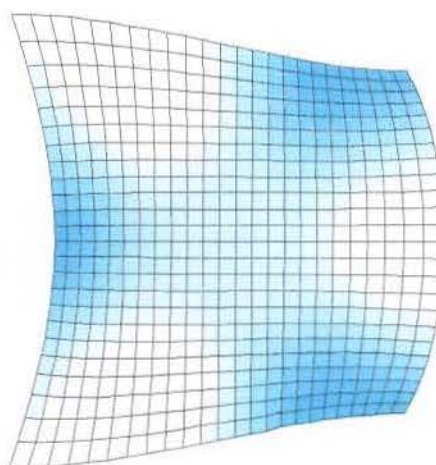


fig.4.9.10

Com as superfícies coloridas de acordo com as curvaturas média e gaussiana, podemos ter

uma melhor visualização do valor destas em cada ponto da superfície original para uma certa região.

O estudo destes quatros casos consiste num exemplo da importância da visualização para o estudo de curvaturas e das superfícies focais.

Considerações Finais

Acompanha esta dissertação um disquete contendo os programas elaborados e utilizados no desenvolvimento do conteúdo da mesma. Estes programas foram elaborados no Software *Mathematica*, versão 2.2.3 e referem-se aos seguintes conceitos:

- 01) Curvatura de Curvas Planas;
- 02) Curvatura de curvas no Espaço;
- 03) Torção;
- 04) Reta Tangente;
- 05) Círculo Osculador;
- 06) Plano Osculador;
- 07) Evoluta;
- 08) Esfera Osculatriz;
- 09) Curvaturas Principais;
- 10) Superfícies Focais.

Algumas informações a respeito da manipulação destes programas se encontram no arquivo *info.ma*, presente no mesmo disquete.

Além destes programas, foram criadas algumas animações afim de facilitar ao leitor a compreensão de alguns conceitos e resultados mencionados neste trabalho. Para gerar as figuras que formam estas animações, além do software *Mathematica*, usamos o software *POV-ray*. Estas animações estão disponíveis na página da internet do *Laboratório de Pesquisa em Educação Matemática na Universidade (EMU)*, no endereço:

http : \\www.emu.ime.unicamp.br

Algumas das curvas e superfícies presentes nesta dissertação apresentaram grande complexidade para serem traçadas em virtude, possivelmente, de uma lenta convergência numérica da parametrização usada. Para contornar estas dificuldades, criamos saídas alternativas e parametrizações por parte que demandaram muito tempo e trabalho. Portanto, vários dos gráficos que podem ser contemplados nesta tese não foram fruto de utilização imediata dos

comandos triviais dos softwares mencionados. Vale a pena ressaltar também que muitas das figuras demandaram um tempo considerável para serem geradas mesmo utilizando microcomputadores modernos e com grande disponibilidade de memória.

Para traçar as figuras, usamos o *Mathematica 2.2.3* que mostrou desempenho satisfatório. No entanto, para provar todos os fatos mencionados durante a dissertação e para dar o tratamento correto aos exemplos e ilustrações, realizamos também determinados cálculos algébricos. Neste tipo de trabalho, o programa *Maple* teve melhor desempenho e eficiência. Mas, é de grande importância enfatizar que todos os programas que usamos necessitaram de auxílio para fazer certas simplificações e escolher a maneira mais conveniente do ponto de vista computacional para se formalizar o resultado. Usando métodos diferentes para realizar esta parte algébrica chegamos a resultados equivalentes com formas distintas. Dentre estas formas, as mais adequadas, através das quais podemos tirar as conclusões desejadas, foram obtidas após muitas tentativas usando técnicas diferentes. Portanto, o bom senso e a capacidade criativa baseados no estudo aprofundado dos conceitos envolvidos, suas equivalências e relacionamentos foram fatores fundamentais para realizarmos esta dissertação na forma que ela se apresenta.

BIBLIOGRAFIA

1. M.P. Carmo- *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc., 1976.
2. S.I.R. Costa and M.A. Grou e V. Figueiredo.- *Mechanical Curves- A Knematic Greek Look Through the Computer*. A ser publicado em International Journal of Mathematical Education for Science and Tecnology, 1998 ”
3. S.I.R. Costa- *On Closed Twisted Curves*. Proc. Amer. Soc., 109, 1990, 205-214.
4. S.I.R. Costa e M.C.R. Fuster- *Nowhere Vanishing Torsion Closed Curves Always Hide Twice*. Geometriae Dedicata 66: 1-7, 1997.
5. A. Goetz- *Introduction to Differential Geometry*. University of Notre Dame, Addison Wesley Publishing Company, 1970.
6. T.W.Gray and Glynn, J.- *Exploring Mathematica with the Matematica*. Addison-Wesley Publishing Company.
7. A. Gray- *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*. 1993, CRC Press, Inc.
8. R. Ossermann- *The Four or More Vertex Theorem*. Amer. Math. Monthly 92, 1985, 332-337.
9. Claudia C. Pansonato-*Propriedades Globais de Curvas*, Tese de mestrado da UNICAMP, 1995.
10. A.Pogorelov- *Geometry*. Mir Publishers. Moscou, 1987.
11. I.R. Porteous- *Geometric Differentiation for the Inteligence of Curves and Surfaces* Cambridge University Press, 1994.

12. V.D.Sedykh- *Four Vertex of a Convex Space Curve*. London Math. Soc. 1994, 177-180.
13. W.Shaw and Tigg, J- *Applied Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Company.
14. C.Smith and Blachman,N.- *The Mathematica Graphics Guidebook*, versão 2, 1995, Addison-Wesley Publishing Company.
15. D.J. Struik- *Lectures on Classical Differential Geometry*. Addison-Wesley Publ. Compl., 1950.
16. [Vigodsky],M. Vygodsky- *Mathematical Handbook*, Moscou, 1978. Mir Publishers
17. S. Wolfram- *The Mathematica Book*. Wolfram Media, Cambridge University Press.
18. S. Wolfram- *Mathematica: A system for Doing Mathematics by Computers*, Addison-Wesley Publishing Company.